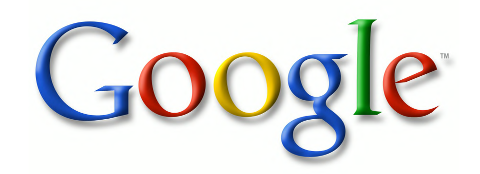
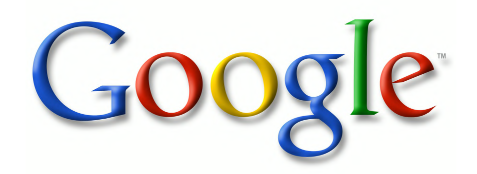
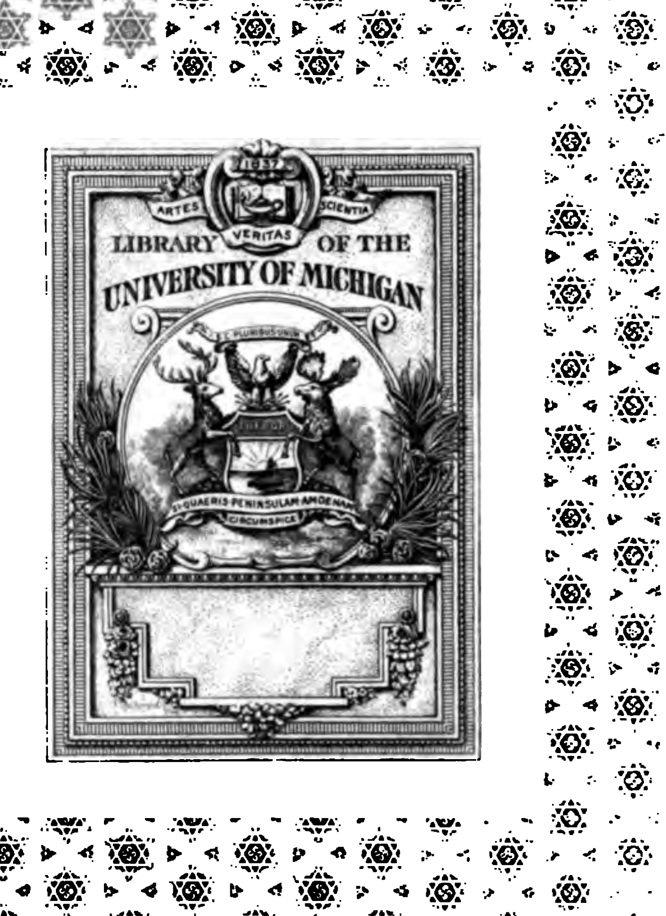
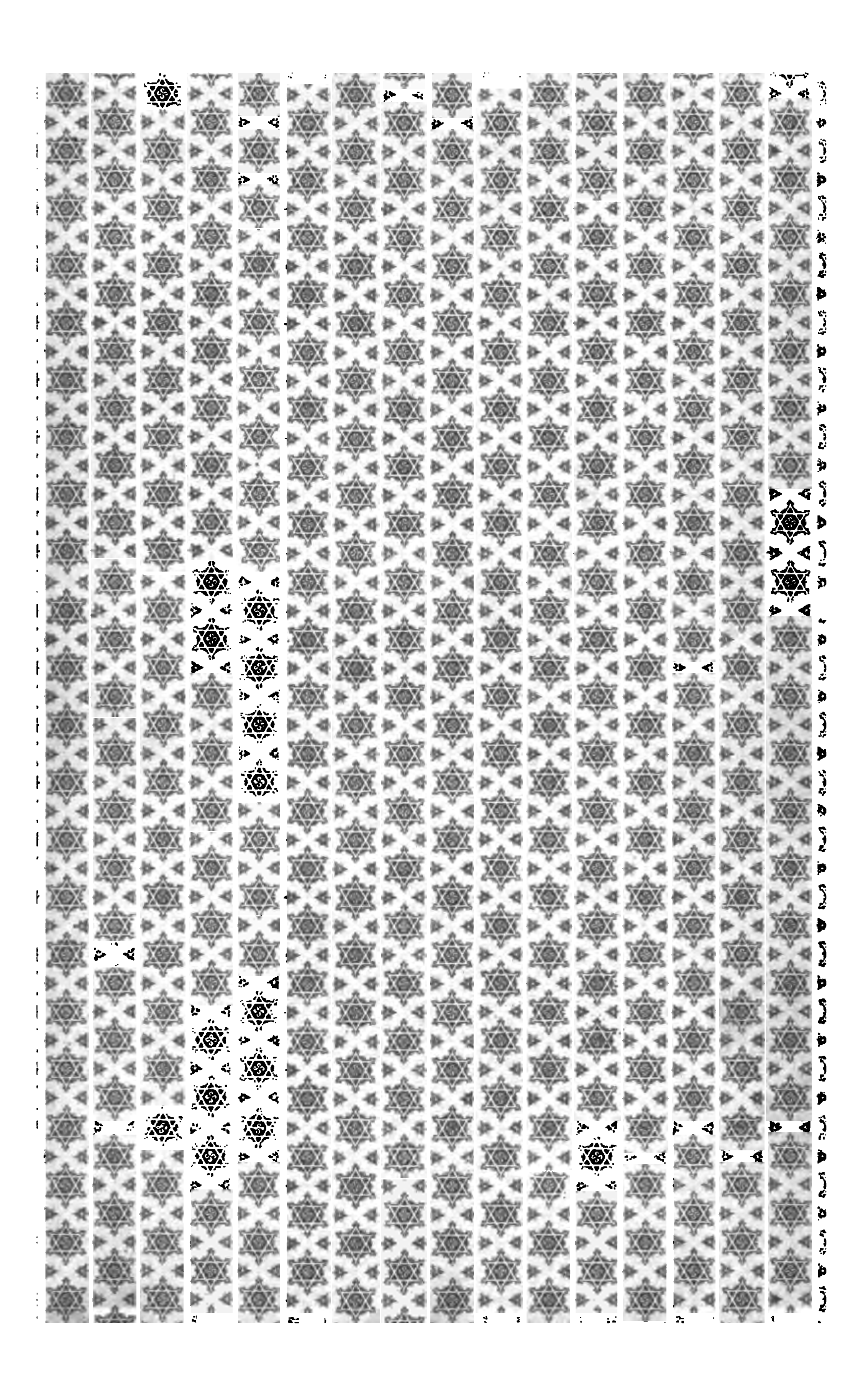





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



ÜBER DIE BEDEUTUNG

DES

WEBER'SCHEN GESETZES

BEITRÄGE

ZUR

PSYCHOLOGIE DES VERGLEICHENS UND MESSENS.

VON

A. MEINONG,

HAMBURG UND LEIPZIG,
VERLAG VON LEOPOLD VOSS.
1896.

Sonder-Abdruck
aus:
Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane.
Bd. XI.

Druck der Verlagsanstalt und Druckerei A.-G. (vormals J F. Richter) in Hamburg.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Vom Gröſsengedanken und dessen Anwendungsgebiet.

Zweiter Abschnitt.

Über Vergleichung, insbesondere Gröſsenvergleichung.

Dritter Abschnitt.

Über Teilvergleichung und Messung.

Vierter Abschnitt.

[illegible]ber Messung von Gröſsenverschiedenheiten.

Fünfter Abschnitt.

Über psychische Messung und das Webersche Gesetz.

Erster Abschnitt.

Vom Gröſsengedanken und dessen Anwendungsgebiet.

§ 1. Das Limitieren gegen die Null.

Bei der engen Verbindung, welche zwischen der Sache des Weberschen Gesetzes und der psychischen Messung besteht, bedarf es schwerlich einer Rechtfertigung, wenn eine diesem Gesetze zugewandte Untersuchung mit Erwägungen anhebt, welche die Gröſse im allgemeinen zum Gegenstande haben. Auf eine schulgerechte Gröſsendefinition ist es dabei keineswegs abgesehen; genauere und unvoreingenommene Prüfung des Thatsächlichen führt in der Psychologie so oft auf Unanalysierbares und insofern Undefinierbares, daſs man nicht wohl Anstoſs daran nehmen könnte, auch im Gröſsengedanken einen solchen Fall anzutreffen. Natürlich schlieſst aber eine Eventualität dieser Art die Möglichkeit einer definitorischen Charakteristik vermittelst indirekter Bestimmungen nicht aus, und das Bedürfnis, sich durch solche Bestimmungen sicher zu stellen, ist hier ohne Zweifel gröſser, als in manchem anderen der Fälle, wo die an sich gewiſs höchst achtenswerte Gewohnheit, more mathematico vorzugehen, dazu geführt hat, dem Vorurteil Folge zu geben, als lieſse sich durch Definitionen alles und ohne Definitionen nichts theoretisch von der Stelle bringen. Denn thatsächlich hat sich der so populäre Gegensatz von Qualität und Quantität für sich allein nicht als deutlich genug erwiesen, um die Frage fern zu halten, ob es denn auch ein wirklicher

Gegensatz sei; das beweist der gelegentlich gemachte Versuch, die psychischen, zunächst die Empfindungsintensitäten als Qualitäten aufzufassen, die nur durch ihren besonders engen Zusammenhang mit den Reizintensitäten ausgezeichnet wären.[1] Weil aber hier eigentlich schon der Appell an unbefangenes Erfassen der in der Sache zunächst kompetenten Empirie, der psychologischen nämlich, leicht genug zur sofortigen Ablehnung dieses Versuches führt,[2] ist es jedenfalls um vieles bedeutsamer, daſs die Psychologie des Lichtsinnes, und sicherlich nicht erst auf dem Umwege theoretischer Spitzfindigkeiten, bekanntlich auf Probleme hingedrängt hat,[3] deren befriedigende Lösung ein zuverlässiges und praktisch leicht anwendbares Kriterium für das, was Gröſse ist, resp. Gröſse hat, unerläſslich voraussetzt.

Ein solches Kriterium habe ich bereits vor Jahren vorübergehend namhaft gemacht,[4] ohne zu wissen, daſs es bereits ein paar Jahre früher mit aller nur irgend wünschenswerten Klarheit von J. v. Kries geltend gemacht worden ist.[5] Es zeigt sich nämlich, daſs, wo immer man es mit Gröſsen zu thun hat, die in weiter nichts als eben in der „Gröſse" verschieden sind, dieselben einem eindimensionalen Continuum, unter Umständen, z. B. bei Zahlengröſsen,[6] auch einer diskreten, aber in einer Dimension liegenden Reihe angehören, das, resp. die nach der einen Seite hin durch die Null begrenzt ist, indes nach der anderen Seite, theoretisch wenigstens, eine Begrenzung fehlt. Man kann also kurz sagen: es ist allen Gröſsen charakteristisch, gegen Null zu limitieren,[7] — und das Einzige, was dem

---

[1] Exner in *Hermanns Handb. d. Physiol.*, Bd. II, 2. S. 242 f., wie es scheint, unabhängig davon auch Boas in *Pflügers Arch.* 28. Bd. 1882. S. 596.

[2] Vergl. Stumpf. *Tonpsychol.* Bd. I, S. 350.

[3] Vergl. Hering, „*Zur Lehre vom Lichtsinn.*" 2. Aufl. S. 52 ff. — Auch F. Hillebrand, „Über die spezifische Helligkeit der Farben", *Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien, Math.-Nat. Kl.* Bd. XCVIII. Abtl. III. S. 78 ff.

[4] „Über Begriff und Eigenschaften der Empfindung." *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* Jahrg. 1889. S. 7. Anm.

[5] „Über die Messung intensiver Gröſsen und über das sogenannte psychophysische Gesetz." *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* Jahrg. 1882. S. 278.

[6] Vergl. Ehrenfels (gegen Brix) in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* Jahrg. 1891. S. 300. Anm. Nach Lipps („*Grundzüge der Logik.*" Hamburg und Leipzig. 1893. S. 120) wäre „Gröſse im engeren und eigentlichen Sinn . . . nur die stetige Gröſse".

[7] Daſs das Wort Limitieren streng genommen hier den Fall der Concreta ausschlieſst, bedeutet natürlich eine im Interesse der Kürze

noch entgegenzuhalten wäre, ist die Frage, ob hier das Wesen der Gröſse nicht durch Hinweis auf Gröſsenveränderung bestimmt, damit also ein circulus in definiendo gesetzt sei. Denn was besagt das „Limitieren“ gegen Null, wenn nicht ein Annähern an dieselbe, und was wäre Näher und Ferner anderes, als kleinere und gröſsere Distanz? Um die Gröſse im allgemeinen zu kennzeichnen, wäre dann nichts als ein spezieller Gröſsenfall in Anspruch genommen, so daſs der Umweg über die Null doch nur zu einem idem per idem zu führen scheint.

Ich bezweifle aber vor allem, daſs dies der praktischen Brauchbarkeit der in Rede stehenden Bestimmung erheblichen Schaden thäte. Denn was Distanz ist, und was im besonderen gröſsere und geringere Distanz, darüber ist doch wohl alle Welt im klaren; sollte man also durch diese Bestimmung unklare und darum verkennbare Gröſsenfälle auf einen unverkennbaren Gröſsenfall gleichsam reduziert haben, so wäre damit allen formalistischen Einwänden zum Trotz denn doch etwas geleistet. Indes möchte es wohl nicht allzu schwer sein, einen Standpunkt einzunehmen, der auch dem formalistischen Einwande nicht ausgesetzt ist, falls es gelingt, den Ausdruck „Limitieren gegen Null“ durch eine Wendung zu ersetzen, die, wenn auch vielleicht nicht deutlicher, so doch von dem Anschein frei ist, speziell mathematische und daher bereits auf den Gröſsengedanken gebaute Voraussetzungen zu implizieren.

Solches ist nämlich vor allem mit vollem Rechte vom Worte „Null“ zu sagen. Null ist, streng genommen, in der That bereits etwas, das derjenige nicht erfassen könnte, dem der

---

wohl statthafte Ungenauigkeit. — Bei nachträglicher Durchsicht von F. A. Müllers Schrift über *„Das Axiom der Psychophysik“* werde ich auf die folgende, vorher von mir unbeachtete Stelle aus *Kants Kritik der reinen Vernunft* (ed. Kirchmann, S. 192) aufmerksam: „Nun nenne ich diejenige Gröſse, die nur als Einheit apprehendiert wird, und in welcher die Vielheit nur durch Annäherung zur Negation = 0 vorgestellt werden kann, die intensive Gröſse.“ Übereinstimmend äuſsert sich neuestens G. E. Müller in seinem ersten, bereits nach Abschluſs der vorliegenden Arbeit erschienenen Artikel „Zur Psychophysik der Gesichtsempfindungen“ *Zeitschr. f. Psychol.* Bd. X. S. 2f.; nur scheint er dabei dem Abstand von der Null (vergl. a. a. O. S. 28 Mitte) eine für den Gröſsengedanken konstitutive Bedeutung beizumessen, welche demselben, wenn ich in den folgenden Abschnitten im Rechte bin, nicht zukommt.

Gröfsengedanke fehlt; Null ist ja Negation der Gröfse. Statt also zu sagen „Gröfse ist oder hat, was gegen die Null zu limitieren fähig ist“, setzen wir etwa die Wendung: „Gröfse ist oder hat, was zwischen sich und sein kontradiktorisches Gegenteil Glieder zu interpolieren gestattet.“ Daran verlangt nur noch der Hinweis auf die Interpolation eine Präzisierung. Am nächsten liegt, dabei an Ähnlichkeit zu denken: ist x die präsumtive Gröfse, so besagt die eben ausgesprochene Bestimmung, x verdiene dann, grofs oder Gröfse zu heifsen, wenn sich zwischen x und non-x etwas einschieben liefse, das sowohl dem x als dem non-x ähnlicher, sowohl vom x als vom non-x weniger verschieden wäre, als x und non-x untereinander. Damit wäre nun aber neuerdings auf ein Mehr und Weniger (der Ähnlichkeit, resp. Verschiedenheit), also neuerlich auf Gröfse rekurriert. Man kann dies vermeiden, indem man den Richtungsgedanken zu Hülfe nimmt, der, wie wohl ohne weiteres ersichtlich, in Wahrheit ein viel, ja ein unvergleichlich weiteres Anwendungsgebiet beanspruchen darf, als die Sprache dem nur ausnahmsweise über das Räumliche hinaus gebrauchten Worte Richtung zuerkennt. Läfst sich nämlich ein y denken, das, gleichsam vom x aus gesehen, in die nämliche Richtung fällt wie non-x, dann ist, resp. hat x Gröfse, und non-x ist die Null; und ich kann nun in der That in dieser Charakteristik auch nicht den entferntesten Anschein eines Circulus vitiosus finden.

Ob jenes Limitieren, wie wir nun wieder kurz sagen können, die Gröfse bereits kurzweg ausmacht oder sie nur verrät, ist durch das Dargelegte noch keineswegs entschieden. Ohne Zweifel ist auch die Richtung im engsten, räumlichen Sinne nicht ein Letztes; vielmehr weist die Thatsache, dafs mehrere Punkte in der nämlichen Richtung oder in verschiedenen Richtungen liegen, auf die Ortsbestimmungen hin, welche diese Punkte, zunächst jedenfalls subjektiv, charakterisieren. Ebenso weist der Umstand, dafs in der Richtung, die von der Existenz des x zu seiner Nichtexistenz führt, noch ein y und dann natürlich auch ein z und noch vieles, ja unzählig vieles andere liegt, auf eine Eigenheit am x, natürlich auch am y und z hin; aber es ist zum mindesten sehr die Frage, ob sich diese Eigentümlichkeit anders als mit Zuhülfenahme eben des Limitierens charakterisieren läfst. Ist dem so, dann liegt es wenigstens sehr nahe (und wir werden uns im zweiten Abschnitte auf

diese Betrachtungsweise noch einmal hingeführt finden[1]), anzunehmen, daſs eben dieses Limitieren die Gröſse im eigentlichen Sinne **ist**, indes dasjenige, was diese Eigenschaft an sich trägt, als dasjenige zu bezeichnen wäre, was die Gröſse **hat**. Auf alle Fälle ist die strenge Durchführung des terminologischen Auseinanderhaltens von „ist" und „hat" schon deshalb sprachgebräuchlich undurchführbar, weil man sich daran gewöhnt hat, etwas, das „groſs" ist, also Gröſse hat, auch ohne weiteres eine Gröſse zu nennen.

Weniger geeignet, falls vom obigen überhaupt anders als nur dem Ausdrucke nach verschieden, schiene mir der gelegentlich[2] gemachte Versuch, Gröſse, zunächst „Intensität", als Steigerungsfähigkeit zu charakterisieren. Ohne Zweifel ist alle Gröſse steigerungsfähig, aber doch wohl nur darum, weil Steigern eben nichts anderes bedeutet als eine Entfernung von der Null. Die Stellung, die Stumpf der Steigerung als einer Relation sui generis neben der Verschiedenheit, resp. Ähnlichkeit angewiesen hat,[3] erachte ich für unhaltbar; es ist, soviel ich sehe, nur ein komplexerer Gedanke, welcher auſser der eben berührten Determination von Gröſsenverschiedenheit etwa auch den Vorgang der betreffenden Veränderung, den Übergang, auſserdem vielleicht auch noch eine auf diesen Übergang gerichtete Thätigkeit, das „Steigern" in sich faſst. Ist dem so, dann hat, wer Gröſse durch Steigerungsfähigkeit charakterisiert, also auch noch das Fähigkeitsmoment einbezieht, doch wohl nur das Einfachere durch das Kompliziertere ersetzt.

§ 2. Anschauliche und unanschauliche Gröſsen.

Es wäre kaum von Wert, die Mannigfaltigkeit dessen, was Gröſse hat oder ist, durch einen Aufzählungsversuch zusammenfassen zu wollen. Dagegen dürfte ein Hinweis auf die Grundklassen, in welche diese Mannigfaltigkeit sich ordnen läſst, dazu dienen, der Eigenart des Gröſsengedankens und seiner wichtigsten Ausgestaltungen näher zu treten und zugleich einige für den Fortgang der gegenwärtigen Untersuchungen wesentliche Gesichtspunkte zu gewinnen.

---

[1] Vergl. unten § 7.

[2] Von Ehrenfels in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* Jahrg. 1890. S. 266.

[3] *Tonpsychologie.* I. S. 96 ff.

Einen willkommenen Ausgangspunkt hierfür bietet die von A. HÖFLER[1] vorgenommene Gegenüberstellung der „phänomenalen und nicht-phänomenalen (kategorialen) Quanta“, derjenigen Gröſsen nämlich, die sich in Wahrnehmungs- oder anschaulicher Einbildungsvorstellung erfassen lassen, im Gegensatze zu denjenigen Gröſsen, wo dies nicht der Fall ist. Nur möchte die Benennung kaum dem recht entsprechen, was hier augenscheinlich gemeint ist. Ich denke nicht in erster Linie daran, daſs der von manchen so gern gebrauchte Ausdruck „Phänomen“ dadurch leicht undeutlich werden kann, daſs das „Phänomenon“ nicht nur dem „Noumenon“, sondern das „Phänomenale“ auch wohl dem „Dispositionellen“ gegenübergestellt wird. Näher liegt ein anderes Bedenken: gehört eine Verschiedenheit, ja auch nur eine Anzahl, streng genommen, wirklich ins Gebiet des „Phänomenalen“? Es geht doch nicht wohl an, etwas „Phänomen“ zu nennen, was nicht „erscheinen“ kann; und auf den Namen der „Erscheinung“ hat doch streng genommen nur Anspruch, was durch Wahrnehmung erfaſsbar ist. Der Sprachgebrauch ist freilich thatsächlich nicht ganz so streng: er verwehrt nicht durchaus, etwas Phänomen zu nennen, was in der Zeit verläuft, so etwa Bewegungen, ja wohl sogar Zeitstrecken selbst, wenn sie nicht zu ausgedehnt sind. Aber je mehr man derlei mit in Betracht zieht, um so mehr verliert der Begriff des Phänomenalen an Bedeutsamkeit, um so mehr kommt zugleich in dem uns hier beschäftigenden Falle das Bedürfnis zur Geltung, über das Gemeinsame ins klare zu kommen, um deswillen wahrnehmbare und anschaulich einzubildende Gröſsen hier unter dem Einen Namen der „phänomenalen Gröſsen“ zusammenstehen. Was die Wahrnehmungsvorstellungen mit den anschaulichen Einbildungsvorstellungen zunächst gemein haben, ist ohne Frage eben die Anschaulichkeit; es dürfte darum in der That sowohl den Intentionen HÖFLERS, als den Thatsachen besser Rechnung getragen werden, wenn wir im Folgenden von „anschaulich vorstellbaren Gröſsen“ gegenüber solchen reden, die nicht anschaulich vorstellbar sind. Daſs ich mir vier Teilstriche an einem Gradbogen oder die Distanz im Betrage eines Zentimeters anschaulich vorstellen kann, daran zweifelt ja auch

[1] „Psychische Arbeit.“ *Zeitschr. f. Psychol.* Bd. VIII. S. 49. (S. 6 des Sonderabdruckes.)

der nicht, der nicht zuzugeben vermöchte, dafs eine Anzahl oder eine Verschiedenheit zu dem im strengen Sinne Wahrnehmbaren gehört.

Dadurch ist natürlich keineswegs in Frage gestellt, dafs im Gebiete des Anschaulichen dem Wahrnehmbaren etwas wie eine Art Prärogative zukommt. Sicherlich kann man, was anschauliche Gröfsen seien, durch nichts deutlicher machen, als durch den Hinweis etwa auf die der Wahrnehmung so häufig sich darbietenden „Intensitäten“, wie sie an Vorstellungsgegenständen z. B. als Tonstärke, Wärme- und Kältestärke (ein gebräuchlicheres Wort, das physikalische Nebengedanken an Temperaturgrad oder gar Wärmemenge genügend ausschlösse, steht nicht zu Gebote), übrigens aber auch an psychischen Thatsachen, die nicht dem Vorstellungsgebiet zugehören, hervortreten, was wenigstens mit Rücksicht auf die Gefühle von niemandem in Zweifel gezogen wird. Beispielen gegenüber, die eine so deutliche Sprache reden, braucht sich die Theorie um eine Legitimation für die Aufstellung der ersten der beiden obigen Gröfsenklassen weiter nicht zu bemühen.

Bei weitem nicht so einfach stehen indes die Dinge in betreff der zweiten Klasse. Um Beispiele von „Gröfsen“, die sich nicht anschaulich vorstellen lassen, wird freilich auch hier niemand verlegen sein: man braucht sich etwa nur elementarer physikalischer Begriffe, wie des der lebendigen Kraft, der mechanischen Arbeit oder dergl. zu erinnern. Die Frage ist aber, ob diese zweifellos der Anschaulichkeit entbehrenden Konzeptionen auch als besondere, eigenartige Ausgestaltungen des Gröfsengedankens anerkannt werden können. Die Gepflogenheit der Physiker, dergleichen Begriffe einfach durch die betreffenden Formeln zu definieren, erzeugt den Anschein und ist sicher auch vielfach der Meinung entsprungen, „lebendige Kraft“ sei überhaupt gar nichts anderes als das Produkt aus Masse und Quadrat der Geschwindigkeit, mechanische Arbeit sei nichts weiter als das Produkt von Kraft (Spannung[1]) und Weg u. s. f. Was sich da der Benennung nach als verschiedene Gröfsenarten darstellt, wären im Grunde nichts als Rechnungsergebnisse, also zuletzt Zahlengröfsen, an deren Natur die besondere Bedeutung der Zahlenwerte, aus denen

[1] Vergl. Höfler a. a. O. S. 46. (S. 3 des Sonderabdruckes.)

heraus sie durch Rechnung gewonnen sind, nichts zu ändern vermöchte.

Man könnte hier sogar noch einen Schritt weiter gehen, der nicht unerwähnt bleiben mag, weil er dem bekanntlich immer noch nicht gerade seltenen Bedürfnisse gemäfs wäre, den psychischen Thatsachen gegenüber, solange es nur irgend angeht, Vogel Straufs zu spielen. Es liefse sich nämlich die Frage aufwerfen, ob wir in den angeblichen Begriffen der Geschwindigkeit, Beschleunigung, Arbeit etc. denn wirklich Begriffe, und nicht vielmehr blofs formelhafte, geschriebene oder gesprochene Zusammenfassungen von Daten vor uns haben, die gar nicht zu einem bestimmten Gedanken vereinigt auftreten müfsten. Ihre Bedeutung läge dann einfach in den in sie aufgenommenen numerischen Einzelbestimmungen, die zusammen nichts weiter ausmachten, als was ich in anderem Zusammenhange[1] als „objektives Kollektiv“ bezeichnet habe. Wie wenig indes, wenn man der Geschwindigkeit gegebenen Falles einen bestimmten Wert zuspricht, damit etwa ein bestimmter Wert von s mit einem bestimmten Wert von t einfach zusammen angegeben sein will, erhellt einfach daraus, dafs die nämliche Geschwindigkeit bei den verschiedensten Beträgen von s und t und beliebig verschiedene Geschwindigkeit bei dem nämlichen Werte von s oder t vorliegen kann.

Psychologischer wäre da schon die Annahme, „Gröfsen“ der in Rede stehenden Art seien immerhin bestimmte, gleichviel, ob in mehr oder weniger eigenartiger Weise vorgestellte Komplexionen, ihre Bezeichnung als Gröfsen aber sei nur ein ungenauer Ausdruck dafür, dass dieselben eine anschaulich vorstellbare Gröfse oder deren mehrere zum Bestandstück haben. So könnte man etwa beim Begriffe der Veränderung das Mehr und Weniger, das man dieser zuzuschreiben pflegt, als das Mehr und Weniger der Distanz verstehen, die zwischen dem Ausgangs- und Endpunkte der Veränderung besteht. Aber was in diesem besonderen Falle die Annahme am meisten empfiehlt, ist am Ende doch die Voraussetzung, dafs der wesentlich negative Charakter des Veränderungsbegriffes[2] eine eigentliche

---

[1] „Beiträge zur Theorie der psychischen Analyse.“ *Zeitschr. f. Psychol.* Bd. VI. S. 352 f. (S. 13 f. des Sonderabdruckes.)

[2] Negativ natürlich nicht etwa deshalb, weil der Gedanke „Veränderung oder Übergang des A in B“ ein B verlangt, das vom A verschieden

Steigerungsfähigkeit ausschliefse. Nun bedeutet aber bereits das Limitieren gegen Null, das wir den Gröfsen charakteristisch gefunden haben, eine Art Übergang zwischen Dasein und Nicht-Dasein, so seltsam, ja fast absurd sich der Gedanke anzulassen droht; es wird also am Ende auch bei der Veränderung Raum für einen Übergang gestattet werden können. Was aber die in Rede stehende Gröfsenauffassung im allgemeinen betrifft, so tritt deren Unhaltbarkeit sofort zu Tage, sobald man eine Komplexion aus mehr als einer Gröfsenbestimmung als Bestandstück vor sich hat. Der oben an *s* und *t* illustrierte Einwand liefse sich mutatis mutandis auch hier vorbringen; es fehlte eben jeder Anhaltspunkt, weshalb man die auf die Komplexion bezogene Quasi-Gröfsenbestimmung lieber nach dem einen als nach dem anderen der gewissermafsen konkurrierenden Bestandstücke vornehmen sollte.

Es wird also wirklich nichts anderes übrig bleiben, als anzuerkennen, dafs, was man sich unter Beschleunigung mechanischer Arbeit u. s. f. vorstellt, Gröfsen sind; es wird dies auch nicht leicht bestritten werden, aber eben unter der oben berührten Voraussetzung, dafs es, streng genommen, Zahlengröfsen, Gröfsen unbenannter Zahlen sind und nichts als dieses. Unbenannt nämlich scheinen diese Produkte, Quotienten etc. doch besten Falles sein zu müssen, da sich der Weg nicht durch die Zeit dividieren, die Masse nicht mit der Geschwindigkeit multiplizieren läfst[1], sonach ein Absehen von allen Zahlenbenennungen aufser etwa einer einzigen unerläfslich, das Zurückbehalten dieser einzigen aber augenscheinlich willkürlich wäre. Daran ist nur zweifellos so viel richtig, dafs es sich hier sehr häufig um Gröfsen handelt, die durch Zahlen präzisierbar sind, aber für keinen dieser Fälle ist, soweit ich sehe, die Unbenanntheit der betreffenden Zahlen zuzugeben. Es ist um nichts weniger unnatürlich, die Beschleunigung als etwa den

---

ist, und weil sich diese Verschiedenheit auch im Satze: „*B* ist nicht *A*“ ausdrücken liefse. Aber um Veränderung zu denken, genügt es ja nicht, an zwei verschiedene Objekte zu denken; es ist auch erforderlich, dafs das *B* an Stelle des *A* trete, das *A* gleichsam ersetze, und darin liegt vor allem, dafs das *A* zu existieren aufhört, bevor *B* zu existieren anfängt Der so unerläfsliche Gedanke der „Nichtexistenz des *A*“ ist die im Text gemeinte Negation.

[1] Vergl. auch v. Kries a. a. O. S. 262

gemessenen Weg oder die gemessene Zeit für eine bloſse Zahl zu erklären; einigermaſsen sorgfältige Beachtung dessen, was man das eine und das andere Mal wirklich denkt, lehrt dies unmittelbar. Die Beantwortung der Frage, was denn sonach bei numerisch bestimmter Beschleunigung, Dichte und dergl. eigentlich gezählt werde, müſste darum noch gar nicht sich von selbst darbieten. Doch scheint mir ein erster Aufschluſs hierüber gleichfalls nicht allzu schwer zu gewinnen.

Augenscheinlich ist die Hauptfrage diese: wenn hier wirklich benannte Zahlen vorliegen, welcher Art sind die Benennungen, — anders ausgedrückt: welcher Art sind die zahlenmäſsig bestimmten Komplexionen, in denen die zahlenmäſsig bestimmten, übrigens von Natur anschaulichen Gröſsen hier vereinigt vorgestellt werden? Da die Komplexionsgröſse jedesmal als Funktion der Bestandstückgröſsen auftritt, so verspricht die Natur dieser Funktion in jedem Einzelfalle den nächsten Anhaltspunkt zu bieten; es kommt also darauf an, warum gegebenen Falles gerade diese Funktion auftritt und keine andere. Warum bestimmt man etwa die lebendige Kraft gerade durch das (halbe) Produkt von Masse und Quadrat der Geschwindigkeit, warum die Geschwindigkeit gerade durch den Quotienten von t in s, — warum nicht lieber die Geschwindigkeit durch ein Produkt, die lebendige Kraft durch einen Quotienten aus den betreffenden Variablen?

Man wird dies zunächst durch den Hinweis darauf begründen wollen, daſs man eben jenes Produkt und nichts anderes lebendige Kraft, diesen Quotienten und nichts anderes Geschwindigkeit genannt habe. Bei der hohen, meines Erachtens allerdings viel zu hohen Meinung, die man, gestützt auf wirkliches oder vermeintliches Vorgehen der Mathematik, sich in betreff der Definitionsfreiheit gebildet hat — man könnte geradezu von einer Art Definitions-Indeterminismus reden —, darf dieser Bescheid auf die Zustimmung rechnen, die sonst nur Selbstverständlichem zu teil wird. Gleichwohl wird man sich darüber nicht täuschen können, daſs bei derlei „Benennungen" Freiheit so wenig als sonst irgendwo ein Recht auf Willkür begründet: auch der Nicht-Physiker wird es wagen dürfen, sich zur Rechtfertigung seines Gegensatzes gegen die unter den Physikern zur Zeit wohl noch vorherrschende Meinung auf die empirisch festgestellte Bedeutsamkeit oder Brauchbarkeit der betreffenden

Zusammenstellungen für Beschreibung und Erklärung zu berufen, wobei zu der hierher gehörigen Empirie sicherlich auch die bei rechnerischer Bearbeitung eines Problems erwachsenden Bedürfnisse zu zählen sind. Immerhin darf man aber nicht besorgen, dabei etwa alle fachmäfsigen Vertreter der Physik gegen sich zu haben; das beweist der Ausspruch Poskes,[1] „dafs jeder physikalische Begriff eine anschauliche Grundlage hat, und dafs der Zusammenhang mit dieser Grundlage nicht aufgehoben werden darf, wenn das volle Verständnis des Begriffes erhalten bleiben soll. So bedeutet Geschwindigkeit nicht den Quotienten $\frac{s}{t}$, der an sich völlig sinnlos ist, sondern vielmehr einen eigenartigen Zustand eines Körpers, dessen genaue Messung mit Hülfe dieses Quotienten möglich wird; so bedeutet Masse nicht $\frac{p}{g}$, sondern eine Eigenschaft, vermöge welcher ein Körper unter der Einwirkung einer bestimmten Kraft eine bestimmte Beschleunigung erfährt. . . . .“

Für unsere auf den den betreffenden Formeln wesentlichen Gedanken gerichtete Fragestellung verdient hier insbesondere der Hinweis auf die „anschauliche Grundlage“ Erwägung. Naheliegende Erfahrungen kommen diesem Hinweise zu statten. Es bedarf nur eines Blickes auf das Alltagsdenken, um sich davon zu überzeugen, dafs der Gegensatz von Geschwind und Langsam diesem Denken gar wohl bekannt ist, die Formel der Mechanik dagegen nicht, — und dafs jener Gegensatz ebenso der Anschauung oder wenigstens Anschaulichkeit zugänglich ist, wie die Bewegung selbst, als deren nähere, eben quantitative Bestimmung die Geschwindigkeit sich darstellt. Ganz Ähnliches ist von der Dichte zu sagen. Was es heifsen soll, dafs eine Allee mehr oder weniger dicht mit Bäumen bepflanzt sei, oder dafs sich die Menschen mehr oder weniger dicht in einem engen Raume zusammendrängen mufsten u. dergl., versteht jedermann, ohne entfernt an einen Quotienten zu denken. Den Unterschied nicht nur bei einem quantum discretum, einer Menge, zu machen, sondern auch bei einem quantum continuum, fällt dem Nicht-Physiker freilich nicht mehr ebensoleicht; aber vielleicht unterscheidet sich auch hier der Physiker oft nur dadurch vom

[1] *Zeitschr f. d. physik. u. chem. Unterr.* Jahrg. III. S. 161, zitiert von A. Höfler im VIII. Jahrgang derselben Zeitschrift. S. 125.

Laien, daſs er sich den Schritt vom Discretum zum Continuum etwa durch eine atomistische Theorie zu ersparen hofft. Natürlich sind nun Beispiele dieser Art, deren sich mehr anführen lieſsen, nicht so zu verstehen, als ob das auſserphysikalische Vorstellen den Geschwindigkeitsgedanken ohne Weg und Zeit, den Dichtegedanken ohne Raum und Raumerfüllung zu konzipieren vermöchte. Wer an Geschwindigkeit denkt, denkt sicherlich an Weg und an Zeit; aber er stellt Weg und Zeit nicht etwa bloſs gleichsam nebeneinander vor, sondern in engster Verbindung, genauer, in einer Relation, vermöge welcher[1] sie sich zu einem Vorstellungsgebilde höherer Ordnung zusammenschlieſsen, zu einer derjenigen Komplexionen, für welche der von Ehrenfels entdeckte[2] Thatbestand der Inhaltsfundierung wesentlich ist. Geschwindigkeit, Dichte und vieles andere wird vom theoretisch Naiven gedacht vermöge fundierter Inhalte;[3] und was die mathematische Bearbeitung dieser Gedanken, die Übertragung derselben in die Formelsprache, zunächst leistet, ist nichts weiter, als die Präzisierung jener Gröſsenrelationen, die zwischen den fundierenden Gröſsen und der fundierten Gröſse vermöge der Natur der betreffenden Komplexion bestehen.

Lieſse sich nun freilich das am einzelnen Beispiele Dargethane auch auf alle übrigen Fälle übertragen, dann hätte dieses Ergebnis mindestens für den gegenwärtigen Zusammenhang ein Zuviel aufzuweisen. Wir hätten es da am Ende ausschlieſslich mit anschaulichen Gröſsen zu thun, indes unser gegenwärtiges Absehen doch auf die unanschaulichen Gröſsen gerichtet ist. Inzwischen ist weder anzunehmen, daſs das anschauliche Denken allen physikalischen Grundformeln durch entsprechende fundierte Inhalte voranzugehen oder auch nur zu folgen vermöchte, noch daſs dort, wo Anschaulichkeit innerhalb gewisser Grenzen zu erzielen ist, diese auch über alle

---

[1] Vergl. meine Ausführungen „Zur Psychologie der Komplexionen und Relationen". *Zeitschr. f. Psychol.* Bd. II. S. 254.

[2] „Über Gestaltqualitäten". *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1890. S. 249 ff.

[3] Ausgesprochen von A. Höfler in dem Vortrage über „Einige nähere und fernere Ziele für die Weiterbildung des physikalischen Unterrichtes am Gymnasium" in der *Zeitschr. f. d. physik. u. chem. Unterr.* Jahrg. VIII. S. 125 f. — Vergl. auch desselben Autors Ausführungen über „Krümmungskontrast". *Zeitschr. f. Psychol.* Bd. X. S. 106.

Grenzen hinaus zu bewahren wäre. Und zwar gilt dies nicht nur von den Grenzen gegen oben und gegen unten, sondern eventuell auch von Bestimmungen ganz anderer Art. Um z. B. nochmals an den Gedanken der Geschwindigkeit anzuknüpfen, so steht wohl aufser jedem Zweifel, dafs Bewegung in jenem eigentlichsten Sinne, dem gegenüber sich z. B. der Gedanke der Wellenbewegung als eine ganz unverkennbare Erweiterung darstellt, mehr ist als blofse Succession kontinuierlich ineinander übergehender Ortsbestimmungen, da ihr ja auch die Identität dessen wesentlich ist, das die verschiedenen Orte hintereinander einnimmt, das „sich bewegt". Diese Identität des zeitlich Verschiedenen ist wohl niemals anschaulich zu erfassen, und wo sie nicht mit in Betracht gezogen ist, kann man, streng genommen, höchstens von Scheinbewegung[1] sprechen. Insofern ist, streng genommen, auch nicht die Geschwindigkeit, sondern eine im eben bezeichneten Sinne zu nehmende „Scheingeschwindigkeit" eine anschaulich vorstellbare Gröfse. Ganz Analoges wäre vom Begriff der Dichte in jenem wohl wieder mit besonderem Rechte als „eigentlich" zu bezeichnenden Sinne zu sagen, der den jedenfalls unanschaulichen Massengedanken mit in sich fafst.

Bleibt so die Anschaulichkeit bereits Determinationen gegenüber zurück, welche die Sphäre des Alltagsdenkens eben erst, wenn überhaupt, überschreiten, so dürfen wir gegenüber der Gesamtheit der mathematisch-physikalischen Konzeptionen vollends keinen Irrtum besorgen, indem wir ihrer unter dem Gesichtspunkte der unanschaulichen Gröfsen gedenken. Zweierlei

[1] Einen wenigstens didaktisch sicher nicht wertlosen Fall solch anschaulicher Scheinbewegung erlebt man so ziemlich bei jeder Eisenbahnfahrt, wo die Telegraphendrähte neben der Bahntrace laufen. Namentlich, wenn man nicht unmittelbar am Fenster sitzt, gewinnt man da bekanntlich sehr oft den Eindruck einer bald langsameren, bald rascheren Auf- oder Abwärtsbewegung der Drähte, was bei dem Umstande, dafs der Eisenbahnzug sich relativ zu seiner ruhenden Umgebung doch nur horizontal bewegt, zunächst befremden könnte. Natürlich ist das Charakteristische der ganzen Erscheinung darin begründet, dafs unmerklich immer neue Stücke des Drahtes ins Gesichtsfeld treten, so dafs eben die oben betonte Identität in Wahrheit nicht vorliegt. Gerade ihrer Einfachheit halber verdient diese Erfahrung, wenn ich recht sehe, ins psychologische Laboratorium verpflanzt zu werden, was natürlich mit leichter Mühe zu bewerkstelligen ist. (Vergl. z. B. E. Mach, „*Leitfaden der Physik für Studierende*". S. 91. Fig. 118, 3.)

jedoch möchte durch den Hinweis auf den Anteil des Anschaulichen an jenen Konzeptionen im Interesse richtiger Würdigung der letzteren geleistet sein. Ist es ein Fortschritt des unanschaulichen Denkens, die Grenzen zu überschreiten, die dem anschaulichen gesteckt sind, erkennt man zugleich das damit verbundene Aufgeben des Anschaulichkeitsvorzuges als Mangel, so bedeuten diese unanschaulichen Konzeptionen Aufgaben für anschauliches Vorstellen, die für ideal gesteigerte Fähigkeiten keineswegs unlösbar heifsen dürften. Dann aber, und vor allem: mag man die Bedeutung dieser unanschaulichen Konzeptionen in jenen, man könnte sagen, psychologischen Idealen erblicken, denen sie gleichsam zustreben, oder, was dem Physiker sicherlich näher liegen wird, in den „eigenartigen Zuständen der Körper", die mit ihrer Hülfe erfafst werden können, in keinem Falle wird man weiter noch Neigung haben, das Ganze über seine Teile, „den Wald vor lauter Bäumen" zu übersehen.

Man kann also allgemein von den unanschaulich vorgestellten Gröfsen der Physik, natürlich ebenso von analog gebildeten Konzeptionen anderer Wissenschaften, sagen: sie werden erfafst nicht durch Zahlen oder Formeln, auch nicht durch die Vorstellung von Zahlen oder Formeln, sondern durch die Vorstellung eines Gegenstandes höherer Ordnung, an dem von Natur anschaulich vorstellbare (und mefsbare) Objekte niederer Ordung in solchen Relationen beteiligt sind, dafs die Gröfse des Gegenstandes höherer Ordnung in der durch die betreffende Formel ausgedrückten Weise mit den Gröfsen der Gegenstände niederer Ordnung variiert.[1] In diesem Sinne wäre z. B. mechanische Arbeit zu bestimmen als „etwas, das sich auf Weg und Spannung in der Weise aufbaut, dafs seine Gröfse durch das Produkt aus den Mafszahlen dieser beiden Bestandstücke gegeben ist". Über die Natur dieses „etwas" wäre durch so indirekte Charakteristik freilich wenig genug ausgemacht, — immerhin aber so viel, dafs die mechanische Arbeit nicht etwa dieses Produkt selbst ist.

Nachträglich mag nun aber der Überschätzung der Bedeutung der Zahl für die unanschaulichen Gröfsen auch noch

---

[1] Die fundamentale Bedeutung des sich hier aufdrängenden Begriffes der Ordnungshöhe bei Gegenständen (resp. Inhalten) darzulegen, mufs ich einer anderen Gelegenheit vorbehalten.

die Thatsache entgegengehalten sein, dafs es unanschauliche Gröfsen genug giebt, die sich als Zahlengröfsen einfach deshalb nicht auffassen lassen, weil sie einer zahlenmäfsigen Bestimmung, sei es zur Zeit, sei es überhaupt, unfähig sind. Nichts ist z. B. natürlicher, als einem Dinge bald mehr, bald weniger Wert zuzuschreiben, und von der so zweifellos vorliegenden Wertgröfse läfst sich zeigen, dafs sie eine höchst einfache Funktion zweier Variablen ist, der Stärke des Gefühls, das sich an das Wissen um die Existenz, und der Stärke des Gefühls, das sich an das Wissen um die Nicht-Existenz des betreffenden Dinges knüpft.[1] Aber wir sind gegenwärtig ganz aufser stande, die Gröfsen dieser Variablen durch Zahlenäquivalente auszudrücken; die Wertgröfse ist also unmöglich eine Zahlengröfse, indes die Unanschaulichkeit dem Wertgedanken gerade durch die gegensätzliche Natur der in denselben einbezogenen, untereinander unverträglichen Sachlagen garantiert ist.

Als Nebenergebnis unserer Erwägungen verdient vielleicht noch ausdrücklich bemerkt zu werden, dafs auf dem Gebiete der unanschaulichen Gröfsen die Definition, vielleicht könnte man allgemeiner sagen, die absichtliche Gedankenbildung bei weitem nicht unumschränkte Herrschaft hat. Ich habe gelegentlich[2] die Komplexionen in vorfindliche und erzeugbare unterschieden; es bleibe hier dahingestellt, ob den zwei so gebildeten Komplexionsklassen in jeder Hinsicht die Bedeutung von Grundklassen zukommt. Im gegenwärtigen Zusammenhange wenigstens scheint die Gegenüberstellung das Wesentliche zu treffen, und man kann sagen: es wäre unrichtig, an den Vorstellungen unanschaulicher Gröfsen alles für Kunstprodukt zu halten, und es steht zu vermuten, dafs auch hier, wie sonst, die Natur das Beste vorgegeben und der menschlichen Intelligenz, zunächst Kombinationsfähigkeit, weit weniger Anlafs, ja auch nur Gelegenheit zum freien Walten geboten hat, als man, vielleicht nicht ohne einen geheimen Zusatz von Selbstgefälligkeit, zu glauben geneigt wäre.

Es wäre sicher ein verdienstliches Unternehmen, dem Anteil

[1] Vergl. meine Ausführungen „Über Werthaltung und Wert" im *Arch. f. systemat. Philos.* Bd. I. S. 327 ff. — als Nachtrag zu meinen *Psychologisch-ethischen Untersuchungen zur Wert-Theorie*". Graz. 1894.

[2] „Phantasie-Vorstellung und Phantasie" in der *Zeitschr. f. Philos. u. philos. Kritik.* 1889. Bd. 95. S. 175.

des sozusagen Natürlichen und Künstlichen in den unanschaulichen Gröſsengedanken mit ausreichender Genauigkeit analysierend nachzugehen; schon aus dem wenigen hier Beigebrachten erhellt, daſs dieser Anteil keineswegs in allen Fällen der gleiche ist. Allen scheint noch eine Eigentümlichkeit zuzugehören, die ich nicht unerwähnt lassen möchte, obwohl sie eher zu Ungunsten als zu Gunsten des hier doch zunächst betonten Momentes der „Natürlichkeit“ gedeutet werden könnte. Ich meine den Umstand, daſs die unanschaulichen Gröſsen sich nicht direkt, sondern nur indirekt vergleichen lassen, genauer, daſs nur die indirekte Vergleichung zu Ergebnissen, zunächst evidenten Urteilen führt. Direkt müssen die Bestandstücke verglichen und aus der Natur der Funktion auf das Gröſsenverhältnis der Komplexion geschlossen werden. Davon macht wahrscheinlich auch die Geschwindigkeit keine Ausnahme: was an zwei Bewegungen direkt verglichen wird, möchten doch wohl allemal nur Orts- und Zeitbestimmungen sein.

§ 3. Teilbare und unteilbare Gröſsen.

Daſs im obigen auf einige, die unanschaulichen Gröſsen betreffende Probleme, obwohl zu deren Lösung kaum mehr als ein recht bescheidener Beitrag geliefert werden konnte, hingewiesen worden ist, geschah weit mehr um dieser Probleme selbst, als um ihrer Bedeutung für die Hauptuntersuchung willen, die ihrer Natur nach zunächst auf die anschaulichen Gröſsen angewiesen ist. Um so wichtiger ist für diese Untersuchung ein anderer Gegensatz innerhalb der verschiedenen Gröſsenklassen, und es darf vom Standpunkte eines befriedigenden Fortganges dieser Untersuchungen jedenfalls als willkommener Vorteil begrüſst werden, daſs bei diesem Gegensatze ernstliche Schwierigkeiten vorerst nicht zu überwinden sind.

Nichts ist gewöhnlicher, als von der Teilbarkeit gewisser Gröſsen zu sprechen: es handelt sich dabei nicht nur darum, daſs man da Komplexionen vor sich hat, an denen sich überhaupt Bestandstücke unterscheiden lassen, die dann als Teile dem Ganzen gegenüberstehen, sondern auch noch insbesondere darum, daſs die so gewonnenen Teile dem Ganzen gleichartig sind, daſs sie Gröſsen sind wie das Ganze und zwar, wie man die bei den Zahlen gebräuchliche Ausdrucksweise übertragend oder erweiternd sagen könnte, gleichbenannte Gröſsen. Räum-

liche und zeitliche Strecken bieten die geläufigsten und zugleich durchaus einwurfsfreie Beispiele: jeder Raum „besteht" aus Räumen, jede Zeit aus Zeiten, womit natürlich keineswegs gesagt sein mufs, dafs die gröfseren Räume und Zeiten erst irgendwie aus den kleineren hervorgegangen, durch explizite Zusammensetzung entstanden anzunehmen sind. Jede Strecke hat Strecken zu Bestandstücken, und diese wieder Strecken u. s. f. ins Unendliche; von dem aber, was man namentlich aufserhalb der Theorie als Teile eines Zusammengesetzten anzuerkennen pflegt, unterscheiden sie sich charakteristisch dadurch, dafs sie, wie man kurz sagen kann, implizite Bestandstücke sind.

Weit minder populär, übrigens gleichfalls nichts weniger als neu ist nun aber die Thatsache, dafs es auch Gröfsen giebt, bei denen von einer Teilbarkeit im obigen Sinne in keiner Weise die Rede sein kann. Es hätte keinen Sinn, von einem lauten Geräusch zu sagen, es enthalte ein leises von übrigens genau der nämlichen Qualität als Teil in sich, falls man dabei nicht etwa sehr ungenauerweise die physischen Erreger des Geräusches im Auge hat. Das Gleiche gilt von der stärkeren Wärme oder Kälte gegenüber der schwächeren, vom gröfseren Schmerz gegenüber dem kleineren u. s. f. Man hat auf Grund dessen Thatbeständen dieser Art geradezu den Gröfsencharakter absprechen wollen;[1] haben wir aber einmal die Fähigkeit, gegen die Null zu limitieren, als Gröfsenkriterium anerkannt, so ist an den Ausschlufs solcher Fälle aus dem Gröfsengebiete weiter gar nicht zu denken. In der That entspricht es durchaus dem Herkommen, sie als intensive Gröfsen den erstberührten als extensiven Gröfsen gegenüberzustellen. Es ist aber mindestens sehr fraglich, ob sich alles, was Gröfse ist, zwanglos unter die beiden Titel des Extensiven und Intensiven einordnen läfst; dagegen hat man die Gewähr einer vollständigen Disjunktion, wenn man der Klasse der teilbaren Gröfsen die der unteilbaren gegenüberstellt,[2] die beiden Ausdrücke bieten wenigstens für unsere nächsten Zwecke zugleich den Vorteil, den für sie fundamentalen Umstand ausdrücklich namhaft zu machen.

---

[1] So Exner und Boas, vergl. oben S. 6. Anm. 1.

[2] Vergl. auch Ehrenfels in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1891. S. 301, und bereits J. v. Kries im Jahrgang 1882 *derselben Zeitschrift.* S. 278 f.

Wie wenig die Gegenüberstellung des Extensiven und Intensiven, solange man diese Begriffe nicht erweitert, die Gesamtheit der (anschaulichen) Gröſsen in sich faſst, beweisen die im Vorhergehenden so oft genannten Zahlen, von denen hier übrigens vorerst natürlich nur die wenigen in Betracht kommen, die dem direkten, anschaulichen Vorstellen zugänglich sind. Dagegen wird man nicht Anstand nehmen, die Zahlen zu den teilbaren Gröſsen zu rechnen mit Ausnahme der Einheit, die von Natur unteilbar ist. Gegenüber den Streckengröſsen verdient Beachtung, daſs man es hier mindestens nicht ausschlieſslich mit impliziten Bestandstücken zu thun hat: in der Zahlengröſse Fünf findet sich die Zahlengröſse Drei als implizites Bestandstück, indes die fünf Einheiten durchaus den Charakter expliziter Bestandstücke an sich tragen.

Sehr wichtig ist die Frage, ob Verschiedenheiten oder Distanzen zu den teilbaren oder zu den unteilbaren Gröſsen gehören; doch scheint mir die Beantwortung ohne Schwierigkeit und ohne den geringsten Zweifel möglich. Man muſs zu diesem Ende nur den Distanzgedanken klar erfassen und sich namentlich davor hüten, den Streckengedanken unvermerkt an dessen Stelle treten zu lassen, was insbesondere bei Distanzen zwischen Raum- oder Zeitpunkten eine sehr naheliegende Gefahr ist.[1] Dennoch wird ja sicher niemand darüber im ungewissen sein, daſs der Gedanke an die Verschiedenheit zweier Punkte im Raume etwas anderes ist, als der Gedanke an die zwischenliegende Strecke, mag eines durch das andere auch noch so eindeutig bestimmt sein. Hält man also Distanz und Strecke wohl auseinander, dann erkennt man mit unmittelbarer Evidenz, daſs eine Verschiedenheit, eine Distanz in Verschiedenheiten teilen ganz denselben Ungedanken bedeutet, als die Tonstärke in Teile zerlegen. Distanz ist eine unteilbare Gröſse, — ein Satz, der übrigens wahrscheinlich auch daraus zu deduzieren wäre, daſs Distanz eine Relation ist. Eine Relation kann nämlich zu allerlei Komplexionen Bestandstück sein, aber man wird so gebildete Komplexionen schwerlich je im eigentlichen

---

[1] Vergl. auch K. Zindler, „Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntnis." *Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien*, Philos.-hist. Kl. Bd. CXVIII. 1889. S. 4 ff. des Sonderabdruckes; dazu die Bemerkungen A. Höflers in der Anzeige der genannten Schrift in Jahrgang 1890 der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* S. 497 f.

Sinne noch Relationen nennen können; vielmehr scheinen Relationen als solche einfach sein zu müssen. Doch soll auf dieses Prinzip hier weiter nicht Bezug genommen werden: die Unteilbarkeit der Distanz verrät sich ohne weiteres von selbst. Übrigens giebt es, soviel mir bekannt, aufser der Verschiedenheit und Ähnlichkeit sonst keine steigerungsfähige, also unter die Gröfsen gehörige Relation.

Fragt man, wie sich die unanschaulichen Gröfsen zum Gegensatze von Teilbarkeit und Unteilbarkeit stellen, so erhellt sofort, dafs hier den unteilbaren durchaus das Übergewicht zufällt; Kries fafst die meisten derselben ohne weiteres unter dem Namen „Intensitäten" zusammen.[1] Doch giebt es hier jedenfalls auch Teilbares, wie das Beispiel der Masse im Sinne der Mechanik oder das sonst irgend einer „Menge" beweist. Dafs hierhergehörige Relationen namhaft zu machen sind, möchte ich auf Grund des eben berührten Prinzipes für sehr unwahrscheinlich halten. Auch in dieser Richtung ist das Gebiet der unanschaulichen Gröfsen erst eingehenden Untersuchungen zu unterziehen, die uns aber vom eigentlichen Ziele dieser Darlegungen allzusehr abführen würden.

---

[1] *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1882 S. 273.

Zweiter Abschnitt.

Über Vergleichung, insbesondere Gröfsenvergleichung.

§ 4. Wesen des Vergleichens.

Der Ausdruck „Vergleichen" hat mit vielen anderen Worten, die zunächst dem Sprachschatze des täglichen Lebens zugehören, die Eigenschaft gemein, nicht völlig eindeutig zu sein. Wer eine Bestellung nach Muster gemacht hat, „vergleicht" die erhaltene Ware mit dem Muster, ob sie diesem auch wirklich entspreche; und wenn er zu dem Ergebnis kommt, dafs die erwartete Übereinstimmung nicht bestehe, so wird doch niemand daran denken, auf Grund dieses Ergebnisses ihm abstreiten zu wollen, dafs er verglichen habe. Gleichwohl hört man nicht selten die Wendung, zwei Dinge seien so verschieden, dafs sie sich gar nicht „vergleichen" lassen; näher präzisiert man dann auch wohl die Bedingung für das Vergleichen durch die Forderung eines angemessenen „tertium comparationis". Wieder in anderen Fällen stellt man dem „Vergleichen" das Unterscheiden geradezu als Gegensatz zur Seite, was doch wohl nur so zu verstehen ist, dafs da der Ausdruck „Vergleichen" einfach im Sinne von „gleich finden" oder wenigstens „ähnlich finden" gemeint sei. Solchen Thatsachen gegenüber empfiehlt es sich, dem theoretischen Gebrauche des Wortes „Vergleichen" eine Feststellung vorausgehen zu lassen, wie dasselbe im Folgenden verstanden sein will.

Alles Thun ist auf ein Ziel gerichtet, dies Wort allgemein (oder ungenau) genug gefafst, dafs eine Begehrung seitens dessen, der „thut", nicht impliziert ist; alles Thun besteht im Annähern an sein Ziel[1] und wird zunächst durch nichts natür-

---

[1] Vergl. meine Bemerkungen in Bd. VI der *Zeitschr. f. Psychol.* S. 449 Dazu die wichtigen Ergänzungen Höflers in Bd. VIII derselben Zeitschrift. S. 74f. (S. 31f. des Sonderabdruckes.)

licher charakterisiert, als durch dieses Ziel, mag es übrigens erreicht werden oder nicht. Auch das Vergleichen ist ein Thun; das Ziel aber, auf das es gerichtet und durch das es völlig natürlich und ausreichend bestimmt wird, ist ein Urteil über Gleichheit oder Verschiedenheit, Ähnlichkeit oder Unähnlichkeit dessen, was eben „verglichen" wird. Mit Rücksicht hierauf ist es angemessen, die genannten Relationen unter dem Klassennamen „Vergleichungsrelation"[1] zu vereinigen; und denkt man sich fürs erste den Namen wirklich nur durch die obige Aufzählung definiert, so kann man, höchstens den Schein einer Zirkelbestimmung auf sich nehmend, auch sagen: Vergleichen ist die Thätigkeit, welche auf die Fällung von Vergleichungsrelationsurteilen, kürzer von Vergleichungsurteilen, gerichtet ist.

Immerhin ist aber noch eine wichtige Einschränkung erforderlich. Wer in der Schule „gelernt" hat, der M. sei ein hervorragenderer Staatsmann gewesen, als der N., oder das Kunstwerk x nehme einen höheren Rang ein, als das Kunstwerk y, der fällt eventuell ebenfalls Vergleichungsurteile; und wenn er sich bemüht, bei Gelegenheit sein Schulwissen wieder hervorzuholen, so liegt auch wohl eine Thätigkeit vor, die auf das Vergleichungsurteil gerichtet ist: dennoch sagt niemand in diesem Falle, er habe „verglichen". Nicht jedes Vergleichungsurteil kann eben als charakteristisches Ziel des Vergleichens betrachtet werden, sondern nur das evidente Vergleichungsurteil, und auch dieses nur, sofern dessen Evidenz wesentlich auf die zu beurteilenden Objekte gegründet ist: dem Vergleichungsurteil auf Grund der Erinnerung an früheres Vergleichen mangelt, wenn ich recht sehe,[2] nicht jede Evidenz; wer sich aber bloſs erinnert, mit Erfolg verglichen zu haben, hat nicht neuerdings verglichen.

Sehen wir im Folgenden von Evidenzfällen dieser letzten Art ab, so darf wohl durch umfassendste Empirie beglaubigt gelten, daſs kein evidentes Vergleichungsurteil ohne Vergleichung zu stande kommt. Dagegen erhellt bereits aus dem oben Gesagten, daſs keineswegs auch umgekehrt jede Vergleichung ein

---

[1] Vergl. meine Ausführungen „Zur Relationstheorie". (*Hume Studien*, II.) S. 76 ff.

[2] „Zur erkenntnis-theoretischen Würdigung des Gedächtnisses." *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1886. S. 30 ff.

evidentes Urteil als Resultat verlangt; sie kann eben auch ergebnislos verlaufen. Vergleichen ist eben nicht soviel als Urteilen, am wenigsten Urteilen in einer bestimmten Richtung; „Vergleichen“ als Gegensatz zu „Unterscheiden“ ist durch unsere Bestimmung sonach ausgeschlossen.

Weiter lehrt aber die Erfahrung, daſs, wenn auch ergebnisloses Vergleichen den Anspruch hat, für Vergleichen zu gelten, es schlechterdings nichts Unvergleichbares innerhalb des Erfaſsbaren giebt, nichts, an dem nicht mindestens der Versuch gemacht werden könnte, zu einem Vergleichungsurteile darüber zu gelangen. Wer also von Dingen redet, die sich aus diesem oder jenem Grunde nicht vergleichen lassen, vermiſst an ihnen nur ein Vergleichen mit Ergebnis, vielleicht sogar (indem er sich geradezu auf allzugroſse Verschiedenheit, die doch selbst durch Vergleichung ermittelt sein muſs, beruft,) nichts als ein Vergleichen mit ausreichend wichtigem Ergebnis. Auch diese Bedeutung des Wortes Vergleichung ist durch obige Bestimmung ausgeschlossen, mag uns aber veranlassen, den Bedingungen erfolgreichen Vergleichens einige Erwägungen zu widmen.

§ 5. Unmittelbares und mittelbares Vergleichen. Vergleichungsbedingungen.

Es empfiehlt sich, hierbei des Umstandes eingedenk zu sein, daſs die Thätigkeit des Vergleichens sich wesentlich anders anläſst, wenn das günstigen Falles resultierende Vergleichungsurteil unmittelbar evident und wenn es nur mittelbar evident ist. Ich will mit Rücksicht auf diese Verschiedenheit des eventuellen Erfolges bezw. von unmittelbarer und mittelbarer Vergleichung reden. Sieht man in den Straſsen der Stadt etwa Gasflammen, elektrisches Glühlicht und Petroleumflammen ausreichend nahe nebeneinander, so kann man sie „unmittelbar vergleichen“; nicht so die Länge des Rheins mit der der Donau. Dennoch wird man demjenigen, der an der Hand der Karte mittelst irgend eines mehr oder weniger geeigneten Verfahrens in dieser Sache zu einem Urteil zu gelangen sucht, nicht wohl absprechen, daſs er die beiden Ströme auf ihre Länge vergleiche; ich nenne dieses Vergleichen ein mittelbares, und man sieht sogleich, wie einem im wesentlichen immer wiederkehrenden Typus des unmittelbaren Vergleichens

eine grofse Mannigfaltigkeit von Verfahrungsweisen gegenübersteht, die mit gleichem Rechte als Fälle mittelbaren Vergleichens zu betrachten sind.

Dafs nun das unmittelbare Vergleichen an andere Bedingungen gebunden, von anderen Erleichterungen und Erschwerungen abhängig ist als das mittelbare Vergleichen, erhellt schon aus der einfachen Erwägung, dafs das mittelbare Vergleichen normalerweise keine andere Aufgabe haben kann, als dort einzutreten, wo dem unmittelbaren Vergleichen der Erfolg versagt ist. Die Vielgestaltigkeit des mittelbaren Vergleichens aber läfst sogleich vermuten, dafs die Feststellung der Bedingungen, Erleichterungen und Erschwerungen für die unmittelbare Vergleichung die bei weitem leichter lösbare Aufgabe ausmachen wird. Dennoch und trotz ihrer augenscheinlichen Bedeutsamkeit möchte es uns zu weit führen, derselben eine eingehendere Behandlung zu widmen; ich mufs mich vielmehr auf einige Bemerkungen beschränken, die mir für den Fortgang der hier mitzuteilenden Untersuchungen wesentlich scheinen.

Da alles unmittelbare Vergleichen eine psychische, näher eine intellektuelle Thätigkeit ist, die nur an Vorstellungsinhalten direkt angreifen kann, so ist es selbstverständlich, dafs streng genommen nur Vorgestelltes sich unmittelbar vergleichen läfst,[1] und nichts ist natürlicher, als dafs es zunächst von der Beschaffenheit der betreffenden Inhalte abhängen wird, ob die unmittelbare Vergleichung Erfolg hat oder nicht. Ohne allen Zweifel sind zwei Gegenstände, sie mögen wie immer beschaffen sein, entweder gleich oder verschieden; eine unbegrenzt gesteigert gedachte Erkenntniskraft müfste dies auch unmittelbar festzustellen im stande sein. Nicht so die begrenzte, an Bedingungen geknüpfte Leistungsfähigkeit des Intellektes, mit dem wir es thatsächlich zu thun haben; vielmehr versagt dieser z. B. unanschaulich vorgestellten Gegenständen gegenüber ganz regelmäfsig seinen Dienst (ich kann die Stärken oder Spannungen zweier galvanischen Ströme nicht unmittelbar vergleichen), — aber auch anschaulichen Gegenständen höherer Ordnung gegenüber, wenn das oben über

[1] Inwieweit darin zugleich ein Wirkliches erfafst wird, wie etwa in den obigen Beispielen, ist zunächst unwesentlich.

Masse, Dichte, Geschwindigkeit und dergleichen Gesagte im Rechte ist.

Ferner hängt der Erfolg der unmittelbaren Vergleichung sichtlich von der Umgebung ab, in der das zu Vergleichende auftritt: man könnte hierher bereits den Umstand rechnen, dafs jedes der zu vergleichenden Objekte einen Teil der näheren oder ferneren Umgebung des anderen ausmachen wird. Vor allem aber habe ich die Gleichartigkeit dieser Umgebung im Auge, genauer die Thatsache, dafs, was als Bestandstück einer Komplexion gegeben ist — und was wäre nicht als ein solches gegeben? — um so leichter mit dem Bestandstück einer anderen Komplexion vergleichbar ist, je gröfsere Übereinstimmung zwischen den beiden Komplexionen sonst besteht. Zwei Flächen vergleichen sich leichter ihrer Gröfse nach, wenn sie gleich, als wenn sie ungleich gefärbt sind, zwei Farben leichter, wenn sie an Flächen von gleicher Gestalt und Ausdehnung gegeben sind, ebenso zwei Tonstärken leichter an gleich hohen, als an ungleich hohen Tönen u. s. f., — die Beispiele zeigen zugleich bereits, dafs es in betreff des Grades dieser Erleichterung oder Erschwerung noch sehr darauf ankommt, was für Bestandstücke und was für Komplexionen vorliegen. Besonders charakteristisch und wichtig scheinen mir hier die Beziehungen zwischen Gestalt und Ausdehnung zu sein. Gerade Linien lassen sich in betreff ihrer Länge mit geraden Linien unter bester Aussicht auf Erfolg unmittelbar vergleichen (von der Erschwerung durch Verschiedenheit der Richtungen sei hier abgesehen), mit krummen dagegen streng genommen, d. h. wenn man alle Hülfsmittel ausschliefst, wahrscheinlich gar nicht. Gleiches gilt von Flächen- oder Körperinhalten bei Verschiedenheit der betreffenden Flächen- oder Körpergestalten; dafs man gelegentlich auf den ersten Blick etwa ein Polygon für kleiner erklärt als einen Kreis, in den sich augenscheinlich jenes ohne Mühe hineinzeichnen liefse, ist schon keine unmittelbare Vergleichung mehr.

§ 6. „Festsetzungen“ über Gleichheit und Verschiedenheit.

Weit entfernt von der Vermutung, hiermit alles Wesentliche namhaft gemacht zu haben, erachte ich es gleichwohl für kein Wagnis, einem Umstande, auf den J. v. Kries viel

Gewicht legt,[1] den Rang einer Bedingung unmittelbaren (oder auch mittelbaren) Vergleichens abzusprechen. Ich habe die von KRIES geforderte definitorische, wohl gar „willkürlich" festzusetzende Bestimmung darüber im Auge, was mit Gleich oder Verschieden im betreffenden Falle „gemeint" sei. Denn mit Gleich und Verschieden ist unter allen Umständen ein und dasselbe,[2] und zwar etwas so Wohlbekanntes, zugleich so Klares und Bestimmtes gemeint, daſs eine Definition, wo sie etwa möglich sein sollte, zum mindesten für die Praxis des Vergleichens nichts zu leisten fände, von Willkürlichkeit in der Festsetzung aber einem so eindeutig Vorgegebenen gegenüber vollends nicht die Rede sein kann. In der That kann ich keinen der Fälle, auf die sich KRIES beruft, so verstehen, als ob dabei die Gleichheit resp. Verschiedenheit selbst irgendwie einer Definition oder Determination unterzogen würde. Auſserdem handelt es sich dabei in der Regel um völlig gesetzmäſsige Thatbestände, die für willkürliche Bestimmungen nicht im geringsten Raum lassen, — Thatbestände, deren wesentliche Leistung darin liegt, daſs sie der mittelbaren Vergleichung dort einen Erfolg sichern, wo dieser bei unmittelbarer Vergleichung ausgeblieben wäre.

Man erwäge etwa den Fall der Flächeninhalte.[3] Es mag ja wirklich auf den ersten Blick einer Erklärung bedürftig scheinen, was es heiſsen solle, ein bestimmtes Dreieck sei einem bestimmten Parallelogramme inhaltsgleich. Wenn man aber dem Fragenden etwa beweisen kann, die Figuren, auf deren Vergleichung es ankommt, seien beide aus demselben Parallelogramme hervorgegangen, das Dreieck etwa durch Ziehen einer Diagonalen, das Viereck, indem die Halbierungspunkte zweier parallelen Seiten des vorgegebenen Parallelogramms verbunden wurden, wird dann an der Behauptung der Gleichheit der beiden so gewonnenen Flächeninhalte noch Anstoſs genommen werden, und wenn diese Gleichheit jetzt keiner Erklärung bedarf, hat sie vorher einer solchen bedurft? Wer weiſs, was ein Flächeninhalt ist und was gleich ist, muſs auch wissen, was ein gleicher Flächeninhalt ist; und sollte er

---

[1] *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1882. S. 259 ff.

[2] Vergl. übrigens unten § 8.

[3] Vergl. KRIES a. a. O. S. 259.

die Gleichheit so wenig definieren können, als er den Flächeninhalt definieren kann,[1] so thut dies der Zuverlässigkeit dieses Wissens keinen Eintrag. „More mathematico" ist der Appell an die Definition sicherlich gedacht; wie wenig dieses mathematische Herkommen aber vor Unnatürlichkeiten schützt, beleuchtet nichts deutlicher als der gleichfalls im Sinne dieses Herkommens bereits mehr als einmal gemachte und vielfach acceptierte Versuch, in den einfachen Gedanken der Zahlengleichheit den so künstlichen der Einheitenzuordnung hineinzuinterpretieren. Wenn man also thatsächlich die Vergleichung der in Rede stehenden Flächeninhalte etwa in der Weise vornimmt, daſs man sie nach bekannten Formeln aus Grundlinie und Höhe „berechnet" und dann die erhaltenen Maſszahlen vergleicht, so impliziert dies keineswegs die Voraussetzung, daſs mit Gleichheit von Flächeninhalten etwas anderes „gemeint" sei, als mit der Gleichheit bei Körperinhalten, noch weniger bedeutet es eine nähere Bestimmung darüber, was mit Flächengleichheit gemeint sei. Wir haben vielmehr, soviel ich sehe, nichts als ein Verfahren vor uns, das zu einem evidenten Vergleichungsurteil dort führt, wo ein solches ohne Anwendung dieses Verfahrens vermöge der Natur des zu Vergleichenden ausgeblieben wäre.

Wie steht es nun aber dort, wo v. KRIES nicht nur eine „Festsetzung" in betreff des Sinnes der Gleichheit, sondern geradezu eine „willkürliche Festsetzung" in Anspruch nimmt? Er beleuchtet seine Forderung durch das Beispiel der Massenvergleichung bei Verschiedenartigkeit der Substanzen. „Was . . . gemeint sei," führt er aus,[2] „wenn wir die Masse des Goldklumpens A für derjenigen des Kupferklumpens B gleich erklären, das ist gar nicht selbstverständlich. Es gewinnt vielmehr erst einen Sinn durch die Festsetzung, daſs als Einheit der Masse einer jeden Substanz dasjenige Quantum betrachtet werden soll, welches mit einem bestimmten Quantum einer bestimmten Substanz (etwa 1 ccm Wasser beim Maximum seiner Dichtigkeit) gleiches Gewicht hat." Diese Festsetzung ist

---

[1] Über Undefinierbares im Vorstellungsschatze der Mathematik vergl. auch ZINDLER, „Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntnis" *Sitzgs.-Ber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien.* Philos.-hist. Kl. Bd. CXVIII. S. 3 des Separatabdruckes.

[2] A. a. O. S. 260 f.

aber eine willkürliche, denn es „steht logisch durchaus nichts irgend einer anderen Festsetzung entgegen, z. B. der, daſs jene Quanta aller Substanzen als gleich betrachtet werden sollen, welche durch die gleiche Wärmemenge von 0° auf 1° C. erwärmt werden". Nun verkennt unser Autor jedoch keineswegs, daſs es sich bei dem thatsächlich allenthalben acceptierten Vorgehen um eine „Festsetzung" handelt, „welche in Anlehnung an gewisse empirisch konstatierte Thatsachen möglichst zweckmäſsig getroffen ist".[1] Wie viel bleibt demgegenüber von der „Willkürlichkeit" noch übrig? Wer möchte dem Gravitationsgesetz deshalb Willkürlichkeit nachsagen, weil „logisch", d. h. in diesem Falle zugleich ohne Rücksicht auf die Empirie, nichts im Wege stände, statt des Produktes aus den Massen den Quotienten, statt des Quadrates der Distanz den Kubus derselben in die Formel zu setzen? Vor allem wichtig scheint mir aber, daſs, was in unserem Falle an „Festsetzung", sei es in quantitativer, sei es in qualitativer Richtung vorliegen mag, die Masseneinheit, sicher aber nicht die Massengleichheit betrifft. Ich glaube, auch in dieser Sache Kries selbst zum Zeugen anrufen zu dürfen. Unter den „empirischen Gesetzen", um deren willen „die übliche Festsetzung bei weitem die einfachste und zweckmäſsigste ist", macht er als erstes „die Proportionalität" geltend, „welche zwischen dem Wachstum der Gewichte und der Massen besteht".[2] Wie könnte ein Gesetz über Proportionalität konstatiert, wie könnte es auch nur ausgedacht werden, solange der Gedanke der Massengleichheit, resp. -verschiedenheit gleichsam noch unvollendet wäre?

An dem einfachen Beispiele der Masse dürfte wohl auch klar geworden sein, was ich den komplizierteren Beispielen von „kombinierten Einheiten"[3] entgegenzuhalten hätte, auf die übrigens bei Besprechung des Messens noch einmal zurückzukommen sein wird. „Weder die Einheit, noch die Dimension irgend einer physikalischen Gröſse," sagt Kries gelegentlich,[4] „ergeben sich von selbst; beide bedürfen vielmehr einer willkürlichen (konventionellen) Festsetzung, welche erst auf Grund von Erfahrungen in zweckmäſsiger Weise geschehen kann."

[1] A. a. O. S. 262.
[2] A. a. O. S. 261.
[3] A. a. O. S. 262 ff.
[4] A. a. O. S. 264.

Man kann diesem Satze im wesentlichen zustimmen und die Wichtigkeit, ja Unentbehrlichkeit dieser Festsetzungen für die mittelbare Vergleichung rückhaltslos anerkennen, ohne einzuräumen, dafs dabei aufser an den Einheiten und Dimensionen auch noch an der Gleichheit der betreffenden Gröfsen auch nur das Mindeste festgestellt worden oder auch nur feststellbar sei.

Nicht überflüssig möchte es dagegen sein, hier noch auch kurz des Falles der Temperaturvergleichung zu gedenken, der zunächst die hier bekämpfte Position in besondes auffallender Weise zu stützen scheint. „Die Grade des Quecksilberthermometers“, bemerkt KRIES,[1] „sind, am Luftthermometer gemessen, nicht gleich. . . . . Selbstverständlich würde es nun keinen Sinn haben, darüber zu streiten, ob das Quecksilber oder das Platin oder die Luft sich proportional ‚der Temperatur‘ ausdehnt. . . .“. Aber es hätte wahrscheinlich auch keinen Sinn, darüber zu streiten, ob das neue Universitätsgebäude in Graz aus x oder aus $x+1$ Stück Ziegeln erbaut ist, und zwar nicht etwa deshalb, weil eine diesbezügliche Behauptung „keinen Sinn“ hätte, sondern darum, weil den Wahrheitsbeweis für dieselbe zu erbringen schwerlich jemand geneigt oder im stande sein wird. Näher handelt es sich bei dem anscheinenden Paradoxon in betreff der Temperaturmessung nicht um Gleichheit der Temperaturen, sondern, wie hier, Späterem vorgreifend, kurz gesagt werden darf, um Gleichheit von Temperaturverschiedenheiten. Sobald man nun den Wärmezustand eines Körpers[2] von den Begleit- und Folgethatsachen dieses Zustandes zu unterscheiden sich für berechtigt hält, hat die Frage, ob gleiche Veränderungen jenes Wärmezustandes mit gleichen Veränderungen in der Reihe dieser oder jener Folgethatsachen Hand in Hand gehen, einen völlig klaren Sinn, mag man die Frage übrigens zu beantworten im stande sein oder nicht. Dagegen schiene mir die Behauptung, dafs die nämlichen beiden Veränderungen mit gleich gutem Rechte als gleich, wie als ungleich betrachtet werden dürften,[3] nur in dem einzigen Falle

---

[1] A. a. O. S. 267.

[2] Vergl. z. B. MACH, *Leitf. d. Phys. f. Stud.* 1891. S. 157

[3] Die dieser Behauptung zu Grunde liegende Auffassung hat A. HÖFLER neuerlich die „nominalistische“ genannt (*Vierteljahresber. d. Wien. Vereins z. Förd. d. physik. u. chem. Unterr.* Jahrg. I. 1. Heft. S. 51). — Man wird ihr eine wenigstens relative Berechtigung dem „Realismus“ gegenüber

acceptierbar, daſs zu der einen Behauptung so wenig Recht vorliegt, als zu der anderen.

Ein Fall wirklich „willkürlicher Festsetzung“ würde meines Erachtens vorliegen, so fern man „zwei Lichtintensitäten als gleich“ betrachtete, „wenn sie unserem Auge gleich hell erscheinen“:[1] die Willkürlichkeit tritt in der Möglichkeit zu Tage, durch Ver-*n*-fachung der bezüglichen lebendigen Kräfte Intensitäten zu erhalten, die dem Auge nicht gleich erscheinen. Aber diese Inkonvenienz läſst sich dann nicht durch eine weitere „willkürliche Festsetzung“ beseitigen;[2] die Konsequenz beweist vielmehr, daſs es eben unberechtigt und unstatthaft ist, auf Grund des bloſsen Gleich-erscheinens ein Gleich-sein anzunehmen, geschweige ex definitione aus dem Gleich-erscheinen ein Gleich-sein zu machen.[3]

§ 7. Spezielles über Gröſsenvergleichung.

Dem im Bisherigen vertretenen Prinzipe der von Natur unbeschränkten und darum nicht erst durch gleichviel in welcher Weise zu treffende Bestimmungen gewissermaſsen erst zu ermöglichenden Geltung des Gegensatzes von Gleich und Ungleich steht nun aber doch eine Gruppe von Thatsachen gegenüber, die insofern für die oben bekämpfte Position noch eine Art Stütze abzugeben scheinen und sowohl deshalb, als um ihrer sonstigen Bedeutsamkeit willen hier noch zur Sprache kommen müssen. Den Knall eines Kanonenschusses stärker finden als die Helligkeit eines elektrischen Bogenlichtes, wäre ebenso absurd, als ihn weniger stark oder gleich stark finden. Es wäre nicht

nicht absprechen können, der in der folgenden, in Sachen psychischer Messung gegebenen Anweisung zur „Konstruktion des Thermometers“ zu Tage tritt: „Man messe einerseits die Wärme an einer Einheit ihrer Art, also an einer Wärmeeinheit, desgleichen das Volumen des Quecksilbers an der Volumeneinheit...... In der That hat man auf diese Weise gefunden, daſs zwischen der Wärmemenge und der entsprechenden Ausdehnung des Quecksilbers eine konstante Beziehung besteht, nämlich die der Proportionalität.....“ (A. Köhler, „Über die hauptsächlichsten Versuche einer mathematischen Formulierung des psychophysischen Gesetzes von Weber“ in *Wundts Philos. Stud.* Bd. III. S. 575.) Vergl. übrigens unten § 15.

[1] v. Kries a. a. O. S. 269.

[2] Gegen Kries a. a. O. S. 270.

[3] Vergl. übrigens unten § 9.

besser, wenn einer eine Wegstrecke mit einer Zeitstrecke, oder die Höhe der in einem Zimmer herrschenden Temperatur mit der Stärke eines den Raum durchdringenden Wohlgeruches „vergleichen“ wollte.[1] In solchen Fällen scheint auch der Unbefangenste das „Vergleichen“, d. h. hier das Gleich-finden wie das Ungleich-finden nicht anders als für sinnlos erklären zu können. Wie leicht zu ersehen, lassen sich Beispiele hierfür in grofser Mannigfaltigkeit zusammenstellen; das eine aber haben alle gemein, dafs das, zwischen dem die Vergleichung hier statthaben sollte und augenscheinlich nicht statthaben kann, jedesmal Gröfsen sind. Wir gelangen damit auch in betreff des Vergleichens auf das die gegenwärtigen Untersuchungen vor allem betreffende Gebiet und haben uns nunmehr ganz ausdrücklich mit den Gröfsenvergleichungen zu beschäftigen, nachdem wir im Vorhergehenden das Gebiet derselben bereits gelegentlich in Beispielen gestreift haben.

Gröfsen vergleichen sich im allgemeinen nicht anders als andere Objekte; dagegen fällt in betreff der Ergebnisse der Gröfsenvergleichung eine zunächst terminologische Eigentümlichkeit ins Auge. Wer die Gröfsen *A* und *B* miteinander vergleicht, wird, wenn er nicht Gleichheit gefunden hat, das Resultat doch nicht leicht in der Form ausdrücken: „*A* ist von *B* verschieden“; er wird vielmehr normalerweise etwa sagen: „*A* ist gröfser“ oder „*B* ist kleiner“. Ich glaube nicht, dafs man diesen Ausdrücken einen anderen Sinn beimessen kann als den, etwas näheres über die Stellung des *A* und *B* auf jener Linie anzugeben, die sie beide in der, wie wir sahen, für alle Gröfsen charakteristischen Weise[2] mit der Null verbindet. Es ist also eine Art Lage- oder Richtungsmoment, das hier an dem Verschiedenheitsgedanken hervortritt. Inwieweit die Verschiedenheit auch in anderen Fällen einer analogen Determination zugänglich ist, kann hier unerwogen bleiben; unter allen Umständen ist es ganz wohl begreiflich, dafs der Richtungsgedanke gerade da zunächst zur Geltung kommt, wo das (gegen die Null) Gerichtet-sein die Sachlage in besonderer Weise charakterisiert.

Es ist ferner unmittelbar ersichtlich, dafs die Wege, auf

---

[1] Scheinausnahmen berührt Kries a. a. O. S. 291 ff.

[2] Vergl. oben § 1.

denen Gröfsen verschiedener Klassen sich der Null nähern oder von ihr entfernen können, keineswegs zusammenfallen. Raumgröfsen, Zeitgröfsen, die verschiedenen „Intensitäten" u. s. f., sie alle gehören je einer Geraden an, die, gehörig verlängert, die Null erreicht: aber diese Geraden fallen sonst in keinem Punkte als etwa höchstens[1] im Nullpunkte zusammen; jede hat eine andere Richtung. Die Null stellt sich sonach als Element einer mindestens zwei-, vielleicht aber auch drei- oder noch mehr-dimensionalen Mannigfaltigkeit dar, und mir scheint dieser Sachverhalt geeignet, einer auf das Verhältnis von Qualität und Gröfse gerichteten Untersuchung Anhaltspunkte zu bieten Insbesondere liegt es nahe, das im ersten Abschnitte in suspenso gelassene Wesen des Gröfse-seins[2] nicht etwa in einem besonderen, neben der Qualität vielleicht selbständig hergehenden Bestandstück, sondern in der Eignung der betreffenden Qualität, einer jener gegen die Null konvergierenden Richtungen anzugehören, insofern also in einer relativen Bestimmung zu suchen. Die Bemerkuug STUMPFS,[3] dafs man immerhin leichter eine Qualität ohne Intensität vorzustellen vermöchte als eine Intensität ohne Qualität, könnte jedenfalls als Bestätigung dieser Auffassung gelten. Befremdlicher erscheint vielleicht auf den ersten Blick eine andere Konsequenz, die nämlich, dafs, was eben das „Gröfse-sein" genannt wurde, streng genommen gar nicht steigerungsfähig ist; etwas kann nicht mehr, ein anderes nicht weniger einer Richtung angehören, die zur Null führt, sondern es gehört dieser Richtung entweder an oder nicht. Steigerungsfähig ist vielmehr eigentlich nur die Qualität, die eben, sofern sie auf einer solchen Richtungslinie sich gleichsam bewegen kann, „Gröfse hat". Aber, sehe ich recht, so ist es nicht eben schwer, über dieses Befremden hinauszukommen, und die Auffassung besteht eine Probe, indem sie die Schwierigkeit, die uns zur Untersuchung der Gröfsenvergleichung geführt hat, in befriedigender Weise zu lösen gestattet.

Wie erwähnt, ist es zunächst Thatsache, gleichviel, worin dieselbe ihren Grund haben mag, dafs, wenn man „Gröfsen

[1] Ein Versuch, genauer zu sein, soll am Ende dieses Paragraphen (unten S. 38) gemacht werden.

[2] Vergl. oben § 1.

[3] *Tonpsychologie* Bd. I. S. 350

vergleicht", man sein Absehen normaler Weise nicht einfach auf das Urteil „gleich", oder das Urteil „verschieden" gerichtet hat, sondern auf ein Glied der Disjunktion „gleich grofs, gröfser oder kleiner". Selbstverständlich ist damit vorausgesetzt, dafs die zu vergleichenden Daten einer und derselben aus der Zahl der gegen Null gerichteten Linien angehören; denn der Punkt a' der einen, der Punkt a'' einer anderen dieser Linien bestimmen zwar auch eine Richtung, aber keine, die zur Null führt.[1] In a' und a'' hat man dann zwei Gröfsen vor sich, die sich „nicht vergleichen lassen", eben unter der stillschweigenden Voraussetzung, dafs mit „vergleichen" die Bestimmung auf gröfser, kleiner oder gleichgrofs gemeint ist.

Wie aber, wenn diese Voraussetzung ausdrücklich ausgeschlossen wird? Ist dann a' und a'' immer noch unvergleichbar im Sinne der notwendigen Ergebnislosigkeit, oder, wenn doch auch für sie die Disjunktion „entweder gleich oder verschieden" gilt, welches der beiden Disjunktionsglieder trifft für sie zu? Mir scheint es darauf nur Eine natürliche Antwort zu geben: a' und a'' sind einander gleich, insofern jedes von ihnen Gröfse ist, übrigens aber, d. h. abgesehen davon, dafs jedes von ihnen einer nach Null führenden Linie angehört, sind sie verschieden. Ich verkenne nicht, dafs sich nun neuerlich eine Art Tendenz geltend macht, zu fragen: wenn a' und a'' Gröfsen, also „grofs" sind, welches von beiden ist das gröfsere, falls sie nicht etwa gleich grofs wären? Darauf ist aber dann eben zu antworten: das „Grofs-sein" kommt freilich beiden zu, aber darin giebt es kein mehr oder weniger, darin sind sie gleich. Das „wie grofs" aber impliziert bereits wieder das Vorgegebensein einer nach der Null weisenden Richtung für beide Objekte; man kann nicht eine an eine gewisse Bedingung geknüpfte Frage aufrecht erhalten, wenn die Bedingung nicht erfüllt ist. Eine Bedingung fürs Vergleichen im allgemeinen Sinne, für die Beantwortung der Frage nach Gleich oder Ungleich, ist dieselbe aber nicht.

Noch soll ein Gedanke hier nicht unberührt bleiben, auf den bereits im Anfange dieser Schrift gelegentlich der Präzisierung des Gröfsengedankens Bezug genommen worden ist.

---

[1] Auch hier sei übrigens auf die am Ende dieses Paragraphen vorzunehmenden Präzisierungen im voraus verwiesen

Bedeutet denn größer und kleiner nicht etwas in betreff der Entfernung von der Null? Und wenn dem so ist, was läßt sich gegen die Frage einwenden, ob a' oder ob a'' von der Null weiter entfernt sei? Solcher Frage gegenüber ist vor allem daran zu erinnern, daß größer und kleiner dem durch diese Wörter bezeichneten Gedanken nach durch Hinweis auf Distanzen sicher nicht interpretiert werden kann: man müßte ja doch größer dann etwa bestimmen, als „weiter von der Null", analog kleiner als „näher zur Null" oder dergl. Das Größer und Kleiner wäre beschrieben als das Größer und Kleiner einer Distanz: der Zirkel ist offenbar. In betreff der Brauchbarkeit einer solchen Distanzbestimmung sei aber vorgreifend auf die im vierten Abschnitte[1] zu berührende Thatsache hingewiesen, daß die Distanz zwischen Null und einer endlichen Größe jederzeit unendlich groß ist, so daß die erfahrungsmäßig feststehende Ergebnislosigkeit solcher Versuche auch bereits theoretisch legitimiert ist. Überdies wäre daraus, daß auf einer und derselben Größenlinie der größeren Distanz von der Null auch die größere Größe entspräche, gar nicht die Umkehrung zu schließen, daß das weiter Abstehende bei ungezwungenem Wortgebrauche auch dann das Größere heißen dürfte, wenn es sich um verschiedene Größenlinien handelt.

Zum Schlusse dieser Ausführungen muß nun aber noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß das denselben zu Grunde gelegte Bild von den gegen einen Nullpunkt konvergierenden Größenlinien sich doch zunächst nur durch seine Einfachheit empfiehlt, bei näherer Untersuchung sich aber einerseits nicht unerheblichen Bedenken ausgesetzt, andererseits auch mit direkten Erfahrungen nicht immer im Einklange zeigt. Auf beides muß hier noch kurz hingewiesen werden.

1. Ist es selbstverständlich oder erweislich, daß alle Größenlinien einen und denselben Nullpunkt haben? Nahe liegt es freilich, anzunehmen, daß, wenn gleichsam mit der Größe zugleich alle Qualität verschwunden ist, auch von Verschiedenheit weiter nicht mehr die Rede sein kann. Andererseits aber kann man aus direkter Vergleichung heraus doch schwerlich behaupten, daß etwa der schwache Schall dem schwachen

---

[1] Vergl. unten § 18.

Geruch ähnlicher sei, als der starke dem starken.[1] Der Gedanke einer Mehrheit von Nullpunkten, am besten dann wahrscheinlich so, dafs jeder Gröfsenlinie ein besonderer Nullpunkt entspräche, ist also vorgängig nicht von der Hand zu weisen. Das oben über Gröfsenvergleichung Gesagte könnte darum immer noch aufrecht bleiben; nur müfste man sich die Gröfsenlinien so zu einander gelegen denken, dafs keine der zwischen Punkten zweier dieser Gröfsenlinien zu ziehenden Verbindungslinien in ihrer Verlängerung einen der anderen Nullpunkte treffen könnte, von Ausnahmen abgesehen, von denen sogleich zu reden sein wird. Da über die Anzahl der Dimensionen nichts vorbestimmt ist, so möchten der Erfüllung dieses Erfordernisses kaum Hindernisse im Wege stehen.

2. Es giebt Gröfsenlinien, deren Punkte trotz zweifelloser Verschiedenheit der Linien auf gröfser oder kleiner verglichen werden können und sonach eine ganz direkte Ausnahme zu dem oben besprochenen Gröfsenvergleichungsgesetze abgeben. Den besten Beweis liefern die Töne und die Feinheit, mit welcher die musikalische Praxis deren Stärke auch bei ungleicher Höhe und Klangfarbe gegeneinander abwägt; ein anderes Beispiel dafür wird uns im folgenden Paragraphen an den Verschiedenheitsgröfsen begegnen. Im Grunde ist ja schon vorgängig zu erwarten, dafs die Gröfsenvergleichungen an die betreffenden Gröfsenlinien sozusagen nicht mit mathematischer Strenge gebunden sein können. Dieser durch Instanzen von der erwähnten Art auch erfahrungsmäfsig gesicherte Spielraum für die Gröfsenvergleichung ist gleichwohl dem oben dargelegten allgemeinen Gesichtspunkte unterzuordnen, wenn man sich einmal mit dem Gedanken an die Vielzahl der Nullpunkte vertraut gemacht hat. Die betreffenden Gröfsenlinien müfsten dann nur derart gegeneinander gelegen sein, dafs die betreffenden Verbindungslinien im Gegensatz zu der oben sub 1 ausgesprochenen allgemeinen Forderung in ihrer Verlängerung dann doch auf einen Nullpunkt träfen.

Auf eine weitere Ausgestaltung und zugleich Überprüfung des Gedankens kann hier natürlich nicht eingegangen werden.

---

[1] Von den bekannten Erfahrungen über Verwechselung schwacher Druck- mit schwachen Temperaturempfindungen darf im gegenwärtigen Zusammenhange wohl abgesehen werden.

Ich mufs mich damit begnügen, ihn kurz gekennzeichnet und seine Brauchbarkeit für das Verständnis der an den Gröfsenvergleichungen beobachteten Thatsachen aufgezeigt zu haben.

§ 8. von Kries über „atypische Beziehungen".

Sind die vorstehenden Ausführungen, wie dem Leser derselben längst aufser Zweifel sein wird, zunächst dem Bestreben entsprungen, in einer für die vorliegenden Untersuchungen fundamentalen Sache den Anregungen gebührend Rechnung zu tragen, welche ich J. von Kries' oben wiederholt zitiertem Aufatze „*Über die Messung intensiver Gröfsen und das sog. psychophysische Gesetz*" verdanke, so kann es der hier erstrebten Klärung nur förderlich sein, wenn nun auch die Vertretung nicht unberücksichtigt bleibt, welche der genannte Forscher dem oben bekämpften Gedanken in einem unter dem 19. Oktober 1892 an mich gerichteten Briefe hat zu teil werden lassen. Die freundlichst erteilte Zustimmung des Verfassers setzt mich vor allem in die angenehme Lage, den hierher gehörigen Teil des genannten Briefes im Wortlaute folgen lassen zu können:

„Sie sind, soviel ich sehe, darin mit mir gleicher Meinung, dafs im Gebiete der Mathematik die Gleichheit ein völlig fester, einer Erklärung weder bedürftiger noch fähiger Begriff ist. Dagegen scheint mir überall sonst (von einigen ganz besonderen Ausnahmefällen hier abgesehen) der Begriff ein äufserst unbestimmter und Allermannigfaltigstes zusammenfassender zu sein.... Betrachten wir z. B. den Fall zweier Intensitäts- oder Qualitätsstufen innerhalb eines Sinnesgebietes, etwa das Intervall $c:d$ und $a:h$. Die Vergleichung führt hier meines Erachtens immer zunächst zu dem Ergebnis, dafs die beiden Stufen etwas wesentlich untereinander Verschiedenes darstellen. Erinnert man sich der eigentümlichen Gleichartigkeit, welche die sämtlichen Elemente des Raumes oder der Zeit besitzen, so könnte man jene Stufen wohl zunächst untereinander inkommensurabel nennen. Bezeichnen wir sie gleichwohl in gewissen Fällen als „gleich grofs", nennen wir in anderen die eine Stufe gröfser als eine andere, so beruht dies meines Erachtens auf eben derselben intellektuellen Funktion, die auch anderwärts eine so bedeutungsvolle Rolle spielt, auf der

Bildung von Allgemeinvorstellungen, unter die Einzelnes, Individuelles subsumiert wird. Im Grunde ist jede Beziehung zweier Empfindungen etwas Eigenartiges, Individuelles, was eben nur diesen beiden Empfindungen zukommt. Die Subsumtion unter die Allgemeinvorstellung „gleich grofs“ ist demgemäfs dann auch eine unsichere. Die Frage aber, ob zwei derartige Stufen wirklich gleich grofs seien oder nicht, ist ebensowenig zu beantworten, wie etwa die, ob eine bestimmte Empfindung rot oder orange sei, sofern durch diese Worte nur die unbestimmten, aus einer Reihe von Einzelempfindungen gebildeten Allgemeinvorstellungen bezeichnet sind. — Eine allgemeine Übersicht über die Beziehungsurteile ergiebt also meines Erachtens, dafs in gewissen Fällen, so beim Zusammenhangsurteil, bei den mathematischen, die behaupteten Beziehungen völlig scharf bestimmte, in zahlreichen Fällen genau die nämlichen sind, es ergeben sich so bestimmte Klassen typischer Beziehungsurteile. Daneben giebt es aber eine Menge, in denen gerade das die Natur des Urteils bestimmende Element, die Art der behaupteten Beziehungen, ganz verschiedenartig ist; ich möchte diese (vorbehaltlich besserer Bezeichnung) atypische Beziehungsurteile nennen.

Der Hauptgrund der entgegengesetzten Auffassung liegt, meine ich, darin, dafs mit der Gleichheit thatsächlich nicht diese subjektiven Gleichschätzungen, sondern eine wirkliche, objektive Gleichheit gemeint wird; in Wirklichkeit, sagt man, können zwei Dinge, auch Empfindungsstufen, doch nur gleich oder ungleich sein. Dafs Fechner selbst seine Messung der Empfindungsstärke in einem solchen Sinne genommen hat, ist wohl unbestreitbar. Aus dem gleichen Gesichtspunkte, wie mir scheint, bestreiten Sie, dafs es sich bei der Gleichheit irgendwo um „willkürliche Festsetzungen“ handeln könne. Meiner Ansicht nach führt innerhalb der Gebiete, um die es sich hier handelt, die objektive Vergleichung zunächst immer nur zu dem Ergebnis der Inkommensurabilität. Die Steigerung der Intensität einer Saitenschwingung von a auf $a + x$ und von b auf $b + y$ sind völlig verschiedene Vorgänge. Erst indem wir für unsere Betrachtung irgend welche bestimmte Seiten willkürlich herausgreifen, gewinnen wir die Möglichkeit, von Gleichheitsbeziehungen zu reden, die einen festen und bestimmten Sinn haben. Die Gleichheitsbeziehungen, von denen

die theoretische Physik handelt, sind also thatsächlich stets nur abgekürzte Ausdrücke für Gröfsenbeziehungen von extensiven und Zahlengröfsen.[1] Eine Ermittelung aber, welche Intensitätszunahmen irgend eines Vorganges wirklich gleich seien, ist (mangels einer solchen Festsetzung) weder möglich, noch in irgend einem Sinne erforderlich; es ist eine falsch gestellte Aufgabe. Man kann die Vorgänge aufs genaueste kennen, jede Abmessung und jedes Zahlenverhältnis, das ganze Detail des Geschehens, und jene Frage doch unbeantwortbar finden."

Indem ich es vermeide, bereits vorher Erörtertes nochmals zur Sprache zu bringen, wende ich mich sofort dem Hauptgedanken der vorliegenden Ausführungen zu, der in der Benennung „atypische Beziehungen" zum Ausdrucke gelangt. Ein Versuch, seiner Bedeutung ganz im allgemeinen nachzugehen, kann hier natürlich nicht gemacht werden; die Verwendung, die er seitens seines Urhebers findet, weist uns vielmehr sofort auf das spezielle, auch im vorhergehenden bereits betretene Gebiet der Gröfsenvergleichung. Verschiedenheiten zwischen verschiedenen Fundamenten sind zwar, das ist doch wohl die Meinung unseres Autors, jederzeit Gröfsen, aber sie sind auch qualitativ verschieden, und ihre Zusammenordnung unter den Gesamtnamen „Verschiedenheit" besagt für qualitative Gleichheit nicht mehr als die Zusammenordnung qualitativ sehr verschiedener Daten unter dem Namen „Blau" oder „Grün" und dieser und vieler anderer unter dem Namen „Farbe". Darum sind Verschiedenheiten streng genommen „unvergleichbar" in dem besonderen, im vorigen Paragraphen erörterten Sinne, d. h. sie gestatten keine Beurteilung nach Gröfser und Kleiner, und erst die „willkürlichen Festsetzungen" können eine solche ermöglichen.

Dem gegenüber scheint mir nun aber vor allem das Zeugnis der Erfahrung angerufen werden zu müssen, das uns in den seit PLATEAU so oft gemachten Versuchen nach der Methode der „übermerklichen Unterschiede" entgegentritt. Es handelt sich dabei um Urteile über Gröfser und Kleiner bei

[1] Eine Ausnahme, die sachlich nicht von Bedeutung ist, macht hier nur die Gleichsetzung zweier Temperaturen. Die Vergleichung von Temperatur*stufen* aber ist durchaus in dem angeführten Sinne willkürlich. (Anmerkung von J. v. KRIES.)

Verschiedenheiten, Urteile, vor denen die von KRIES anerkannten Ergebnisse der Raum- und Zeitvergleichung höchstens einen graduellen Zuverlässigkeitsvorzug voraushaben. Von „Festsetzungen“ ist beim Fällen solcher Urteile thatsächlich nicht die Rede, und ich kann auch gar nicht absehen, was für Festsetzungen hier zu Gröſsenvergleichungen zu führen vermöchten, wenn solche durch die Natur des zu Vergleichenden ausgeschlossen wären.

Dagegen scheint mir unstatthaft, daraufhin auch der These von der nicht bloſs quantitativen, sondern auch qualitativen Variabilität der Verschiedenheit entgegenzutreten, nur ist mir sehr zweifelhaft, ob die Erfahrungen, auf die ich mich zu Gunsten dieser These berufen muſs, mit denen zusammenfallen, welche für KRIES maſsgebend waren. Denn auch in dieser Sache kann ich Raum und Zeit so wenig in einer Ausnahmestellung finden, daſs mir vielmehr das qualitative Moment nirgends deutlicher erfaſsbar scheint als beim Raume, wo ihm sogar die Sprache durch Ausdrücke Rechnung trägt, die dem Wortvorrate des Alltagslebens angehören. Jedermann weiſs, daſs zwei „verschiedene“ Punkte im Raume nicht nur eine gewisse Distanz, sondern auch eine gewisse Lage zu einander haben, die bei gleichbleibender Distanz sich ändern, bei geänderter Distanz gleich bleiben kann.[1] Nichts könnte hier ungezwungener sein, als in der Distanz die quantitative, in der Lage die qualitative Seite der Verschiedenheitsrelation zu erblicken, die zwischen den betreffenden beiden Ortsbestimmungen besteht. Bei Zeitverschiedenheiten giebt es freilich keine Variabilität der Lage: daſs aber auch diesen Relationen nicht jede Qualität fehlt, ist schon vorgängig selbstverständlich;[2] und daſs diese Qualität der räumlichen Lage analog ist, ergiebt die Thatsache, daſs zwei Zeitpunkte ohne Rücksicht auf die Gröſse des Abstandes zwei einander diametral entgegengesetzte Zeitrichtungen ganz ebenso in sich schlieſsen, wie in der Lage zweier Raum-

---

[1] Vergl. auch A. HÖFLER, „Zur Analyse der Vorstellungen von Abstand und Richtung“ in Bd. X der *Zeitschr. f. Psychol.* S. 223 ff., dem gegenüber ich jedoch auf der Nebeneinanderstellung von Abstand und Lage (statt Richtung) beharren muſs. Richtung ist doch wohl ein auf Lage gebauter Gedanke höherer Ordnung, da Eine Lage je nach Wahl des Ausgangspunktes [illegible] i en [illegible] setzte Richtungen fundieren kann.

[2] Vergl. ol [illegible] S. [illegible]

punkte zwei entgegengesetzte Raumrichtungen eingeschlossen sind. In gleicher Weise zeigen die Continua der Empfindungsqualitäten entweder Punkte von unverkennbar verschiedener „Lage“ zu einander, oder, wo die Lage vermöge der Eindimensionalität der betreffenden Mannigfaltigkeit nicht variabel ist, verrät sich der Lage-Charakter an der Möglichkeit entgegengesetzter Richtungen; und soweit ich sehe, giebt es überhaupt keine Verschiedenheit, bei der man neben der Gröſse nicht wenigstens von Richtung und daher von Lage reden dürfte.

Daraus folgt nun natürlich keineswegs, daſs etwa zwei verschiedene Verschiedenheiten jedesmal auch qualitativ verschieden sein müſsten; für den Fall aber, daſs sie es sind, scheint das im vorigen Paragraphen ausgesprochene Gröſsenvergleichungsgesetz eine Beurteilung der beiden Verschiedenheiten auf Gröſser und Kleiner auszuschlieſsen. Damit stimmen denn auch manche Erfahrungen aufs beste überein: eine Raumdistanz gröſser oder kleiner finden als eine Zeitdistanz, hätte kaum erheblich mehr für sich als das analoge Urteil über Raum- und Zeitstrecken. Dagegen wird gegen eine Gröſsenvergleichung in Bezug auf horizontale mit vertikalen oder schrägen Abständen auch Kries nichts einwenden, wenn auch die Lageverschiedenheiten sich als gelegentlich recht erhebliche Erschwerungen für das Vergleichen fühlbar machen werden. Wir befinden uns hier also ohne Zweifel in dem vom allgemeinen Gröſsenvergleichungsgesetze ausgenommenen Gebiete, von dem schon zu Ende des vorigen Paragraphen die Rede war,[1] und die dort skizzierte Auffassung dürfte sich, wenn ich recht sehe, auch hier bewähren. Daſs im allgemeinen Verschiedenheiten, gleichviel von welcher qualitativen Determination, einander in ähnlicher Weise nahe stehen, daher in ähnlicher Weise nahestehende Nullpunkte haben werden, wie etwa Töne von verschiedener Höhe, das spricht ja für sich selbst; daſs dies aber für Verschiedenheiten aller möglichen Qualitäten gelten müſste, dafür fehlt jede Evidenz, und das obige Beispiel von Raum- und Zeitdistanz läſst das Gegenteil vermuten. Nur wird man sich hüten müssen, dort logische Unmöglichkeit der Gröſsenvergleichung anzunehmen, wo die Unmöglichkeit vielleicht bloſs eine empirische ist, d. h. auf eine für die that-

---

[1] Vergl. oben S. 38.

sächlich vorliegenden intellektuellen Kräfte nicht zu bewältigende Aufgabe zurückgeht. Man wird sicher geneigt sein, Farben- und Tonhöhenverschiedenheiten für a priori „unvergleichbar“ zu halten, und doch urteilt man mit vollster Evidenz, daſs die Verschiedenheit zwischen zwei Farben oder die zwischen zwei Tönen kleiner ist als die zwischen Ton und Farbe. Viel weiter noch gehen Münsterbergs Versuche, Gewichts- mit Licht-, Schallstärke-Verschiedenheiten u. s. f. zu vergleichen;[1] und mag man denselben auch alle erdenkliche Zurückhaltung entgegensetzen,[2] jedenfalls bedeuten sie eine sehr beachtenswerte Anregung, den Schein apriorischer Selbstverständlichkeit auch in dieser Sache an der Hand des Experimentes ausdrücklich nachzuprüfen.

Es dürfte sich empfehlen, die Diskussion der Kriesschen Aufstellungen[3] durch eine kurze Erinnerung an die dabei gewonnenen Hauptergebnisse zu beschlieſsen. Vergleichungsurteile bedürfen einer „Festsetzung“ darüber, was Gleichheit oder Verschiedenheit ist oder sein soll, nicht und gestatten sie nicht; dagegen können Präzisierungen in betreff dessen, was verglichen werden soll, gar wohl erforderlich, unter besonderen Umständen vielleicht auch willkürlich zu treffen sein. Während ferner nichts im allgemeinsten Sinne unvergleichbar heiſsen kann, ist die Gröſsenvergleichung, die Beurteilung auf Gröſser

---

[1] *Beitr. z. experim. Psychol.* Heft 3. S. 59 ff.

[2] Immerhin habe ich aus ein paar nur ganz vorläufigen Proben einen freilich bloſs subjektiven Eindruck gewonnen, der dem Vorhaben weit eher günstig als ungünstig ist. Wieviel davon auf Rechnung sekundärer Kriterien oder Scheinkriterien (vergl. die schon einmal angezogene Stelle bei Kries a. a. O. S. 291 ff.) zu setzen ist, bedarf natürlich noch sorgsamster Untersuchung; und an eine „neue Grundlegung der Psychophysik“, genauer an einen Aufbau derselben auf „Muskelempfindungen“, wird man darum noch lange nicht zu denken brauchen. Offenbar unabhängig davon ist die Behauptung Ehrenfels' („Zur Philosophie der Mathematik.“ *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1891. S. 301), es habe „einen sehr guten Sinn, von einer Tonstärke zu sprechen, welche zu einer anderen das gleiche Gröſsenverhältnis aufweist wie etwa die Zahl Drei zur Zahl Eins, oder Fünfzehn zu Fünf, oder der Kubikinhalt eines Prismas zu der zugehörigen Pyramide“. Das Recht, hier statt „Verhältnis“ genauer „Verschiedenheit“ zu setzen, werden die Untersuchungen der folgenden Abschnitte darthun.

[3] Ein kleiner Nachtrag zu derselben soll noch im nächsten Paragraphen aus anderem Zusammenhange heraus geliefert werden.

und Kleiner, an die Bedingung geknüpft, daſs die auf ihre Gröſse zu vergleichenden Objekte ihrer Qualität nach einander ausreichend nahe stehen. Dies gilt auch für den noch spezielleren, für unsere späteren Untersuchungen aber vor allem wichtigen Fall, daſs die zu vergleichenden Gröſsen Verschiedenheiten sind, nur wäre es in gleicher Weise zu weit gegangen, wenn man die Relation „Verschiedenheit“ ganz im allgemeinen für „atypisch“ erklären, als wenn man in den eventuell vorliegenden Qualitätsverschiedenheiten innerhalb des Verschiedenheitsgebietes ein unter allen Umständen unübersteigliches, gleichviel, ob apriorisches oder empirisches, Gröſsenvergleichungshindernis erblicken wollte.

§ 9. Die Thatsache der Unterschiedsschwelle.

Als das Ziel, auf das alle Vergleichungsthätigkeit gerichtet ist, wurde oben das evidente Urteil über Gleichheit oder Verschiedenheit, kürzer das evidente Vergleichungsurteil bezeichnet. Es wird entbehrlich sein, der Beschaffenheit dieses Urteiles hier eine eingehendere Untersuchung zu widmen; nur der eine Umstand kann nicht unerwähnt bleiben, daſs in betreff der zu erzielenden Evidenz das Gleichheits- dem Verschiedenheitsurteil keineswegs auf gleicher Stufe zur Seite steht, zum mindesten dort nicht, wo es sich um die Vergleichung von Gegenständen handelt, die einem Continuum oder Quasi-Continuum (was hiermit gemeint ist, wird sich sofort ergeben) angehören. Charakteristisch hierfür ist der Umstand, daſs in solchem Falle kein Besonnener Anstand nehmen wird, eine auf Vergleichung gegründete Gleichheitsbehauptung dahin zu restringieren, daſs er keine Verschiedenheit habe bemerken können,[1] während umgekehrt niemand sich einfallen lieſse, bei zweifellos erkannter Verschiedenheit, etwa der zwischen einem grünen und einem roten Pigment, auch nur die Möglichkeit einer unerkannten Gleichheit aufkommen zu lassen. Hält man, wogegen vom Standpunkte des theoretisch Unvoreingenommenen ein Einwand kaum zu besorgen sein wird, erkannte von that-

---

[1] Über die charakteristische Unsicherheit der Gleichheitsurteile vergl. auch Fechner, „Über die psychophysischen Maſsprinzipien und das Webersche Gesetz“ in *Wundts Philos. Stud.* Bd. IV. S. 192, nur daſs dort die Bedeutung der „zeitlich-räumlichen Nicht-Koincidenz“ (ibid. S. 190 ff.) erheblich überschätzt sein dürfte.

sächlicher Gleichheit resp. Verschiedenheit auseinander, so ann man sagen: es giebt Gebiete, auf denen sich Gleichheit streng genommen niemals mit Sicherheit erkennen läſst; was für solche Erkenntnis genommen werden könnte, ist bloſs ein Schein von Gleichheit, dem mit groſser, vielleicht unendlich groſser Wahrscheinlichkeit[1] die Wirklichkeit nicht gemäſs ist. Dagegen kann von einem trügenden Scheine der Verschiedenheit normalerweise nicht die Rede sein, vielmehr bleibt hier, wenn man so sagen darf, der Schein gleichsam hinter der Wahrheit zurück. Was verschieden erscheint, ist auch verschieden; was hingegen verschieden ist, erscheint als verschieden nur bis zu einer Grenze, jenseits welcher der Schein der Gleichheit eintritt. Die Grenze heiſst bekanntlich Unterschiedsschwelle: sie scheidet die merklichen von den unmerklichen oder, wie man auch sagt, die übermerklichen von den untermerklichen Verschiedenheiten; geordnete Reihen des nur untermerklich Verschiedenen aber präsentieren sich durchaus wie Continua, und Fälle dieser Art sind es, die mit Rücksicht hierauf oben unter dem Namen Quasi-Continua mit in Betracht gezogen worden sind.

Die in Erfahrungen dieser Art hervortretende Inferiorität der Gleichheitsaffirmation und Verschiedenheitsnegation gegenüber der Gleichheitsnegation und Verschiedenheitsaffirmation gehört ohne Zweifel zu den Fundamentalthatsachen der Erkenntnistheorie. Ohne auf ihre prinzipielle Bedeutung hier näher eingehen zu können, muſs doch auf ein paar, auf den ersten Blick paradox erscheinende Konsequenzen derselben hingewiesen werden, die sich einstellen können, wenn mehrere Urteile der eben bezeichneten Beschaffenheit zusammentreffen. Die Erfahrung lehrt, daſs, wenn mir a gleich b und b gleich c erscheint, mir darum a nicht auch gleich c erscheinen muſs.[2] Ebenso kann mir eine Distanz ab gleich AB, bc gleich BC erscheinen, dennoch ac nicht gleich AC,[3] wenn die im Alphabet einander nächststehenden Buchstaben eben merklich Verschiedenes, die beiden Alphabete aber Regionen verschiedener Unterschiedsempfindlichkeit bedeuten u. dergl. m. Wirkliche

---

[1] Vergl. Stumpf, *Tonpsychologie*, Bd. I. S. 33.

[2] Vergl. Stumpf, a. a. O.

[3] Vergl. J. v. Kries, „Über Real- und Beziehungsurteile". *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1892. S. 283.

Probleme wird darin, wer sich mit der erwähnten Fundamentalthatsache abgefunden hat, nicht wohl mehr erblicken können; und gilt die Fundamentalthatsche von ganz beliebigen Continuen und Quasi-Continuen ohne Rücksicht auf ihre qualitative Beschaffenheit, so werden auch Scheinparadoxien der eben bezeichneten Art nicht wohl an bestimmte Vergleichungsgebiete gebunden sein. Es scheint mir erforderlich, dies ausdrücklich hervorzuheben, weil J. v. Kries der Vergleichung und Messung des Psychischen in dieser Hinsicht eine Ausnahmestellung anzuweisen und zugleich auf diesem Ausnahmegebiete seiner oben bekämpften Ansicht von den „willkürlichen Festsetzungen" eine besondere Stütze zu geben versucht hat. „Im Gebiete der physischen Gröſsen," meint er,[1] „erhalten die Aussagen über Gleichheit oder sonst eine Gröſsenbeziehung ihre weittragende Bedeutung durch den den mathematischen Gesetzen entsprechenden Zusammenhang, in welchem die Gesamtheit solcher Statuierungen stehen muſs. ..... Im Gegensatze hierzu nur ist die subjektive Gleichheit, das Gleicherscheinen zunächst von durchaus singulärer Bedeutung." Hier „ist also, ehe von einer Messung die Rede sein kann, eine Festsetzung darüber erforderlich, was man gleich nennen will, und der (nur empirisch zu führende) Nachweis, daſs diese Gleichsetzungen in einem den mathematischen Gesetzen entsprechenden Zusammenhang faktisch stehen". Ohne hier schon auf die erst in den folgenden Abschnitten abzuhandelnden Angelegenheiten der Messung eingehen zu wollen, meine ich im Hinblick auf die ja bereits vor jeder besonderen Erwägung klare Zusammengehörigkeit von Vergleichen und Messen schon hier der Position J. v. Kries' zweierlei entgegenhalten zu müssen. Einmal halte ich dafür, daſs, wer gewillt ist, den Schein der Gleichheit nur dort für wahre Gleichheit gelten zu lassen, wo die Konformität mit den Gesetzen der Mathematik gewahrt bleibt (deutlicher könnte man wohl sagen: wo man auf keine Unvereinbarkeiten geführt wird,[2] insofern noch überhaupt nichts, also im besonderen auch

---

[1] A. a. O. S. 282 ff.

[2] Ob freilich nicht gelegentlich auch einmal der Versuch gemacht wird, es an diesem Willen fehlen zu lassen? Man möchte solches vermuten, wenn S. Exner die Camererschen Hautsinnversuche in den Sätzen zusammenfaſst: „Zwei gleiche Empfindungsgröſsen verdoppelt, geben ungleiche", und „Zwei Empfindungsgröſsen einer dritten gleich sind

nichts über Gleichheit „willkürlich festsetzt", sondern nur den sonst jederzeit bindenden Denkgesetzen auch hier Rechnung trägt. Dann aber giebt es, wie schon oben berührt, den eventuell trügenden Schein der Gleichheit auf physischem Gebiete im Prinzip ganz ebenso wie auf psychischem, weil die in Rede stehende Inferiorität der Gleichheitsaffirmation sich ganz ebenso geltend machen muſs, wenn das Verglichene physisch als wenn es psychisch ist. Daſs es beim Messen gerade darauf ankommt, den eigentümlichen Mängeln menschlicher Vergleichungsfähigkeit nach Thunlichkeit nachzuhelfen, soll hier so wenig in Abrede gestellt werden, als daſs auf physischem Gebiete ungleich günstigere Vorbedingungen hierzu vorliegen. Aber völlig beseitigen lassen sich diese Mängel ja thatsächlich nirgends; dies bezeugt am deutlichsten die Theorie der Beobachtungsfehler, deren Begründern nichts ferner gelegen haben wird als die Intention, speziell den Bedürfnissen psychologischer Forschung zu dienen.

§ 10. Verschiedenheit und Merklichkeit.

Es ist nicht zu verkennen, daſs, wenn man eine Verschiedenheit das eine Mal als groſs oder klein, das andere Mal als merklich oder unmerklich bezeichnet findet, man es mit zwei ganz verschiedenen Weisen des Charakterisierens zu thun hat, dort mit einer mehr direkten, man könnte sagen, innerlichen, hier mit einer mehr indirekten, sozusagen äuſserlichen, insofern dort auf eine der betreffenden Verschiedenheit selbst zukommende Eigenschaft, hier auf das Verhalten eines ihr zugewandten Intellektes hingewiesen ist. Die Charakterisierung eines Sachverhaltes durch das Erkennen hindurch bleibt ein Umweg, aber ohne Zweifel jederzeit der natürlichsten einer. Leicht kann er immer noch, wenn nämlich der gerade Weg aus irgend einem Grunde unzugänglich ist, unter den zugänglichen Wegen der

---

nicht untereinander gleich" [illegible] Erklärung der [illegible] Leipzig und Wien 1884 S. [illegible] [illegible]

direkteste sein, leicht auch, wo der gerade Weg nicht geradezu verschlossen ist, neben ihm seinen eigentümlichen Wert behalten. Thatsächlich hat sich denn auch der Gedanke der Merklichkeit überall, wo man den Gesetzmäſsigkeiten des Vergleichens nachzugehen unternommen hat, in hohem Maſse brauchbar erwiesen, und auch hier kann seine Bedeutung nicht völlig unerwogen bleiben.

Bei den sehr weit gehenden Konzessionen, die man diesem Gedanken namentlich auf jenem Gebiete der experimentellen Psychologie gemacht hat, das man, FECHNER zu bleibendem Ruhme, als Psychophysik zu benennen pflegt, hat man sich ohne Zweifel vielfach durch erkenntnistheoretische Erwägungen leiten lassen, zu denen sich nicht etwa nur bei den Vergleichungen Anlaſs zu bieten schien. So meint WUNDT, daſs die Frage, „wie sich die Empfindungen unabhängig von ihrer Auffassung und Vergleichung verhalten", der direkten Untersuchung unzugänglich ist;[1] und wie nahe die hier berührte „Auffassung" dem uns jetzt beschäftigenden Merklichkeitsgedanken steht, erhellt deutlich genug daraus, daſs der genannte Autor später, da er zum „mathematischen Ausdruck des Beziehungsgesetzes" gelangen will, sich geradezu „die Merklichkeitsgrade der Empfindung auf eine Abscissenaxe" aufgetragen denkt.[2] Wir kommen auf dieses Vorgehen weiter unten noch kurz zurück; hier ist es nur berührt wegen der Analogie zu dem, was bei der Vergleichung speziell im Falle der Verschiedenheit Sache unserer näheren Erwägung sein muſs.

„Direkt gegeben", das scheint ja auch hier ziemlich selbstverständlich, sind uns nicht die objektiven Verschiedenheiten, sondern unser Wissen um dieselben, das Bemerken oder „Merken" derselben. Wir können darum von einer Verschiedenheit nichts uns Näheres aussagen, als ihre Merklichkeit; und soweit diese Merklichkeit noch näheren Bestimmungen zugänglich ist,

---

[1] *Physiol. Psychol.* 4. Aufl. Bd. I. S. 333. „Auf das entschiedenste" betont z. B. auch J. MERKEL (*Philos. Studien*, Bd. IV. S. 541), daſs er „in Übereinstimmung mit WUNDT und KÖHLER nur eine Untersuchung der Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindungschätzung für möglich halte."

[2] *Physiol. Psychol.* 4. Aufl. Bd. I. S. 400. „WUNDT denkt sich die Empfindung", interpretiert A. KÖHLER (in *Wundts Philos. Stud.*, Bd. II. S. 595), „oder besser den Merklichkeitsgrad einer Empfindung ... aus einer Reihe von Merklichkeitszuwüchsen ..... bestehend ...".

scheinen es diese Bestimmungen zu sein, an die eine möglichst unbefangene Beschreibung des empirisch Vorliegenden sich zu halten hat. Und wirklich haben wir in dem für den Schwellenbegriff so wesentlichen Gedanken des „eben merklichen“ Unterschiedes eine solche Bestimmung vor uns. Eine andere bietet sich in der Merklichkeitsgröfse, dem Mehr oder Weniger der Merklichkeit dar, das man denn auch wirklich den Vergleichungen von Verschiedenheiten zu Grunde liegend angenommen hat. So erachtet es z. B. S. Exner einer besonderen Begründung augenscheinlich gar nicht bedürftig, wenn er behauptet, dafs „die Gröfse eines Empfindungsunterschiedes nur durch seine gröfsere oder geringere Merklichkeit gegeben ist“.[1] Nach G. E. Müller bedeutet, „dafs wir beim Übergange von einer Empfindung zur anderen im einen Falle den Eindruck einer gleich grofsen Verschiedenheit erhalten wie im anderen Falle“, nichts anderes, als „dafs uns der Unterschied im einen Falle ebenso merklich sei, wie im anderen“.[2] In gleicher Weise meint noch A. Grotenfelt: „Wir können unmittelbar wirklich nur die Merklichkeitsgrade der Unterschiede vergleichen, d. h. dieselben als mehr oder weniger merklich schätzen“.[3]

Hier sind es zunächst wohl die „Merklichkeitsgrade“, die einiges Befremden wachrufen. Giebt es denn „Grade“ des Merkens? Entweder man merkt etwas, oder man merkt es nicht; wo sollte da Gelegenheit zur Steigerung sein, wie wir sie für jedes Mehr oder Weniger unerläfslich gefunden haben? Ich glaube in der That, dafs der Gedanke des Merkens einer Gröfsenbestimmung unzugänglich ist. Inzwischen erwächst hieraus eine nennenswerte Schwierigkeit deshalb nicht, weil die in Rede stehenden Stufen offenbar nicht am Merken selbst, wohl aber an dem leicht anzutreffen sind, was man die Leichtigkeit oder Schwierigkeit des Merkens, oder eben besser die gröfsere oder

---

[1] *Hermanns Handbuch.* II. 2. S. 244; vgl. ibid S. 218.

[2] *Zur Grundlegung der Psychophysik,* S. 388; vgl. auch die Definition der Unterschiedsempfindlichkeit als „Fähigkeit, vermöge welcher der Unterschied zweier gegebener Reizgröfsen uns in höherem oder geringerem Grade merklich werden kann“, a. a. O. S. 1.

[3] *Das Webersche Gesetz und die psychische Relativität.* Helsingfors 1888. S. 121 f. und sonst. Sogar „untermerkliche Reizunterschiede“ werden unter Voraussetzung einer „Tendenz, bemerkt zu werden“ in diese Auffassung einbezogen. Vgl. a. a. O. S. 104.

geringere Leichtigkeit des Merkens nennen kann.[1] Es handelt sich einfach um das Mehr oder Weniger der zum Erkennen der betreffenden Verschiedenheit erforderlichen psychischen Arbeit,[2] und es bedeutet höchstens eine ganz unerhebliche Gewaltsamkeit im Ausdruck, wenn in diesem Sinne statt „leichter merklich" kurzweg „merklicher" gesagt wird.

Dagegen ist es nun aber weit mehr als eine bloſs terminologische Frage, ob die sozusagen prinzipielle Vorzugsstellung, welche wir gemäſs der eben wiedergegebenen Ansicht dem Merklichkeitsmomente angewiesen finden, auch eine verdiente ist. Ich kann dies weder dort einräumen, wo es eine sozusagen isolierte oder vereinzelte Verschiedenheit zu erkennen, noch, wo es Verschiedenheiten zu vergleichen gilt.

1. Bezeichnen wir mit e eine Empfindung und mit m_e deren Merklichkeit, ebenso mit v eine Verschiedenheit und mit m_v deren Merklichkeit, so besagt die erste der beiden in Rede stehenden Positionen: unmittelbar gegeben ist nicht e, sondern m_e, — nicht v, sondern m_v. Allein, was bedeutet dieses Gegebensein? Doch wohl nur Erkanntwerden, natürlich mit der erforderlichen Sicherheit und Evidenz. Nun handelt es sich ja aber gerade darum, daſs einmal e, das andere Mal v „gemerkt", d. h. doch auch hier nur, daſs es erkannt wird; in welchem Sinne oder mit welchem Rechte könnte man nun sagen, daſs hier e oder v weniger „unmittelbar" erkannt werde als m_e oder m_v? Und wäre die auf e oder v gerichtete Erkenntnis minder unmittelbar als die des betreffenden m, warum sollte diese letztere als unmittelbar genug toleriert werden? Der Erkenntnis des Merkens kann ja auch eine Erkenntnis der Erkenntnis des Merkens, sozusagen eine Erkenntnis des Merkens des Merkens zur Seite gestellt werden u. s. f. in infinitum. Man sieht, apriorische

---

[1] Lipps identifiziert geradezu „das unmittelbare Bewuſstsein des Grades der Ähnlichkeit" mit dem „unmittelbaren Bewuſstsein der Schwierigkeit des Unterscheidens oder Auseinanderhaltens" (*Grundzüge der Logik.* S. 104).

[2] Vgl. A. Höfler, Psychische Arbeit, *Zeitschr. f. Psychol.* Bd. VIII. S. 97 f. (S. 54 f. des Sonderabdruckes) — übrigens in der gegenwärtigen Anwendung mit erstaunlicher Klarheit antizipiert von F. Boas, „Über die Grundaufgabe der Psychophysik" in *Pflügers Arch.* Bd. 28. 1882. S. 574 f., wo z. B. die Leichtigkeit, mit der ein Verschiedenheitsurteil gefällt wird, als „das Maſs der psychischen Arbeit" bezeichnet erscheint, „welche zum Fällen des Urteils nötig ist".

Erwägungen, soweit sie hier überhaupt zum Worte kommen, sind weit eher geeignet, vor dem Hinausgehen über das, oder genauer vor einem Zurückgehen hinter das *e* und *v* zu warnen, als es zu verlangen; es bliebe also nur noch zu fragen, ob vielleicht empirische Gründe, etwa die erfahrungsmäfsig festgestellte oder zu vermutende gröfsere Zuverlässigkeit, es ratsam machen, sich an die Erkenntnis des *m* statt an die des *e* oder *v* zu halten. In einem speziellen Falle, von dem sogleich[1] zu reden sein wird, ist dem nun wirklich so: von einem allgemeinen Zuverlässigkeitsvorzuge aber lehrt die Erfahrung, soviel mir bekannt, nichts. Dagegen bietet sie anderweitig so viele Belege dafür, um wie vieles besser unsere intellektuellen Fähigkeiten auf die Beschäftigung mit äufseren als inneren Thatbeständen eingerichtet sind oder sich eingerichtet haben, dafs die Erkenntnis des Merkens namentlich gegenüber der Erkenntnis der Verschiedenheit sicher wenigstens dort im Nachteile sein wird, wo es Physisches zu vergleichen gilt.[2] Man könnte nun nur noch etwa daran denken, dafs das Merklichkeitsmoment bei Vergleichung von Verschiedenheiten entscheidende Vorzüge aufzuweisen habe; wir gelangen damit zum zweiten Hauptpunkte der hier zu prüfenden Ansicht.

2. Es sollen nach dieser Ansicht nur die Merklichkeitsgrade der Verschiedenheiten verglichen werden können; warum nicht die Verschiedenheiten selbst? Sieht man von apriorischen Scheingründen, wie sie eben sub 1. gewürdigt wurden, ab, so ist man hier entweder auf direkte Erfahrungen über die Ergebnislosigkeit von Verschiedenheitsvergleichungen, oder auf

---

[1] Vergl. unten § 11.

[2] Verschiedenheit an sich ist natürlich, wie ich schon an anderem Orte berührt habe („Beiträge zur Theorie der psychischen Analyse“ in Bd. VI der *Zeitschr. f. Psychol.* S. 441 f., S. 71 des Sonderabdruckes) nichts Physisches, aber auch nichts Psychisches, woran ausdrücklich zu erinnern der oben (S. 51, Anm. 1) zitierten Stelle aus Lipps' „*Grundzügen der Logik*“ gegenüber nicht überflüssig ist. Das „Auseinanderhalten“, dessen Sicherheit nach S. 122 des erwähnten Buches das „unmittelbare Bewufstsein“ der Verschiedenheit „bestimmt“, ist jedenfalls eine psychische Leistung, indes doch niemand daran denken wird, Verschiedenheit als eine solche zu bezeichnen. Ein sekundäres Kriterium könnte darin natürlich immer noch liegen, aber nur unter günstigen Umständen, die, wenn das im Texte von der Vorzugsstellung des Physischen Gesagte seine Richtigkeit hat, weit davon sein werden, die Regel auszumachen.

Schlüsse aus der Beschaffenheit einerseits der Verschiedenheiten, andererseits der Merklichkeiten angewiesen. Erfahrungen der erstbezeichneten Art sind aber meines Wissens nicht gemacht, noch weniger als Legitimation obiger Behauptung ins Feld geführt worden. Dagegen könnte die Frage, ob denn Verschiedenheit ihrer Natur nach überhaupt steigerungsfähig sei, immerhin aufgeworfen werden, wenn man, wie ja gelegentlich geschehen ist,[1] den Verschiedenheitsgedanken auf die Negation zurückzuführen versuchen wollte. Aber vor allem ist dieser Versuch schon an sich mit der direkten Empirie nicht in Einklang zu bringen. Ist auch der Tisch vom Sessel verschieden, so kann ich doch den Tisch nicht vom Sessel negieren, so wenig, als den Sessel vom Tisch; nur eine Relation kann man in Bezug auf die beiden Objekte in Abrede stellen, hier natürlich eine Vergleichungsrelation, etwa Gleichheit oder gar Identität. Derlei kann ohne Zweifel in diesem oder jenem besonderen Falle einem Vergleichungsurteile zu Grunde liegen; in der Regel aber zeigt daran unvoreingenommene Beobachtung weder negativen Charakter noch eine andere zum Zwecke des Negierens implizierte Relation. Weiter zeigt aber die direkte Erfahrung auch noch dies mit gröſster Klarheit, daſs Abstände zwischen Orten, Tönen u. a., also Verschiedenheiten, verglichen werden können, ohne dabei entfernt an Merklichkeit oder andere Hülfsdaten zu denken, und daſs das Ergebnis solcher Vergleichungen durchaus nicht etwa Gleichheit oder Ungleichheit sein muſs, sondern ein sehr entschiedenes Urteil im Sinne von Gröſser oder Kleiner sein kann. Zieht man aber schlieſslich die vielberufenen Merklichkeitsgrade selbst in Betracht, so fällt, was sich dabei herausstellt, ganz und gar nicht zu ihren Gunsten in die Wagschale. Ein Anderes ist es freilich, wenn das eine Mal eine Verschiedenheit sich kaum oder nur mit gröſster Mühe erkennen läſst, indes sie ein ander Mal sozusagen von selbst in die Augen springt; und ohne Zweifel giebt es auch Übergangsstufen zwischen diesen Extremen. Aber ebenso bekannt ist, daſs sich die Kurve der Leichtigkeiten, wenn man so sagen darf, ihrem Maximum asymptotisch nähert, noch lange bevor die als Abscissen gedachten Ver-

---

[1] So von Brentano (*Vom Ursprung sittlicher Erkenntnis.* Leipzig 1889. S. 73).

schiedenheitsgrößen ihre etwaige Maximalgrenze erreichen. Für einen Menschen mit normalem Tonsinn ist die Sekunde nicht „schwerer" zu unterscheiden, als Terz oder Sext oder Undecim oder Doppeloktave und was darüber hinausliegt, indes die Verschiedenheitszunahme sicher auffällig genug ist. Wer aber etwa in der Besonderheit des Toncontinuums Anlässe findet, die Triftigkeit dieses Beispieles in Frage zu ziehen, kann unschwer aus dem Farbencontinuum sich unangreifbarere Beispiele in Menge auswählen. Kurz, man würde übel genug wegkommen, wenn man sich bei Verschiedenheitsvergleichungen darauf steifen wollte oder könnte, sich ausschließlich an die betreffenden „Merklichkeiten" zu halten, — von der Absonderlichkeit ganz abgesehen, die doch jedenfalls darin läge, wenn allemal ein Mehr (an Verschiedenheit) gerade dort behauptet würde, wo die Vergleichung eigentlich ein Weniger (an aufgewendeter Arbeit) ergeben hätte.

§ 11. Das ebenmerklich Verschiedene.

Muß ich sonach dem, was mir als eine beträchtliche Überschätzung der Bedeutung des Merklichkeitsmomentes erscheint, entschieden entgegentreten, so soll doch damit in keiner Weise in Zweifel gezogen sein, daß unter besonderen Umständen die Merklichkeit und deren Erkenntnis für den Ausfall der Vergleichung, zunächst für die Präzisierung ihres Ergebnisses von großem Vorteile, vielleicht aber auch als Fehlerquelle von Nachteil werden kann. Ich denke natürlich zunächst an die Thatsache der Unterschiedsschwelle und an den darauf gegründeten Begriff der „Ebenmerklichkeit", für dessen Bedeutung Theorie wie Praxis übereinstimmendes Zeugnis ablegen. Trotz dieser Übereinstimmung möchte es jedoch nicht überflüssig sein, das eben über das Verhalten von Verschiedenheit und Merklichkeit Dargelegte durch ein paar diesem Spezialfalle gewidmete Erwägungen zu ergänzen.

Daß vor allem zwei eben merkliche Verschiedenheiten darum nicht, wie z. B. noch EXNER annimmt,[1] auch gleich sein müssen, ist nach Obigem nun völlig selbstverständlich. So weit

---

[1] *Hermanns Handbuch* II. 2. S. 218. Noch weiter in gewissem Sinne geht LIPPS' Position: „Das eben Merkliche hat — für die Wahrnehmung nämlich — keine Größe mehr" (*Grundzüge der Logik*. S. 121).

ist der Position BRENTANOS[1] in dieser Sache unbedenklich zuzustimmen; streng genommen aber schon nicht mehr darin, dafs dieser eben Merkliches doch als jedenfalls gleichmerklich konzediert,[2] wenigstens nicht, sofern bei „gleichmerklich" an Gleichheit dem Merklichkeitsgrade nach gedacht ist. Man mache sich doch die Eigentümlichkeit des Gedankens klar, der in den Worten „eben merklich" seinen Ausdruck findet. Der betreffende Merklichkeitsgrad ist hier dadurch charakterisiert, dafs er einer Verschiedenheit zugehört, die, wenn nur ums geringste herabgesetzt, unmerklich wird. Wie grofs also die Merklichkeit ist, die sich zuerst geltend macht, indem der Unterschiedsschwellenwert eben überschritten wird, darüber ist im Begriffe des „eben Merklichen" eigentlich noch gar nichts vorgegeben: der Möglichkeit nach könnte die Merklichkeitslinie mit einem hohen wie mit einem niedrigen Merklichkeitsgrade einsetzen, und ob es immer der nämliche Grad ist, darüber kann am Ende nur die Empirie entscheiden. Nur wenn man das „gleich" in „gleich merklich" auf die Umstände bezieht, nach denen im Falle der Ebenmerklichkeit die Sachlage charakterisiert ist, dann werden natürlich zwei Fälle von Ebenmerklichkeit auch als Fälle von „Gleichmerklichkeit" anzuerkennen sein.

So wenig nun Gleichheit der Verschiedenheiten begrifflich an deren Ebenmerklichkeit gebunden ist, so wenig geht eines mit dem anderen thatsächlich jedesmal zusammen. Dafür bürgt die Variabilität jener dispositionellen Faktoren, für die der Ausdruck „Unterschiedsempfindlichkeit" doch kaum mehr als ein Sammelname ist, der den praktischen Bedürfnissen gemäfs die zu vergleichenden „Reize" und das Vergleichungsergebnis als Anfangs- und Endglied herausgreift, indes genauere Analyse mindestens sozusagen zwei Stufen auseinanderzuhalten genötigt sein wird. Ich meine einmal die Weise, in der die Empfindung den Veränderungen der Reize zu folgen vermag, dasjenige im Verhalten des vergleichenden Subjektes, dem STUMPF die Bezeichnung „Unterschiedsempfindlichkeit" ausschliefslich vorbehalten möchte,[3] indes mir angemessener schiene, hier im Hinblick auf einen sofort zu berührenden

[1] *Psychol.* I. S. 9.
[2] A. a. O. S. 88.
[3] *Tonpsychologie* Bd. 1. S. 30.

Gegensatz „Reizunterschiedsempfindlichkeit" zu sagen. Ferner die Weise, in der die vergleichende Thätigkeit das der Reizunterschiedsempfindlichkeit gemäfs beschaffene inhaltliche Material gleichsam zu bewältigen im stande ist, was in der von STUMPF erwiesenen[1] Urteilsschwelle zu Tage tritt; es schiene mir charakteristisch, im Gegensatz zur Reizunterschiedsempfindlichkeit hier von „Inhaltsunterschiedsempfindlichkeit" oder auch Gegenstandsunterschiedsempfindlichkeit zu reden. Wo dergleichen Distinktionen entbehrlich sind, könnte dann immer noch der Terminus „Unterschiedsempfindlichkeit" schlechtweg seine herkömmliche Anwendung finden.

Was nun zunächst die Reizunterschiedsempfindlichkeit anlangt, so ist sofort klar, dafs, je nachdem die Empfindung bei möglichst kontinuierlich sich veränderndem Reize gröfsere Sprünge machen mufs, die eben merklichen Verschiedenheiten gröfser sein werden, als wenn die Sprünge kleiner sind. Das nächstliegende Beispiel dafür geben wohl die Verschiedenheiten der Sehschärfe bei direktem und bei indirektem Sehen, indem sonst, wie schon J. v. KRIES bemerkt hat,[2] „bei der grofsen Stumpfheit des peripheren Raumsinnes im Vergleich zum centralen jeder Gegenstand beim Übergang vom direkten ins indirekte Sehen vollständig zusammenzuschrumpfen scheinen" müfste.

In gleicher Weise wird aber auch die Inhaltsunterschiedsempfindlichkeit zur Geltung kommen müssen, falls die Urteilsschwelle, wie doch nicht zu bezweifeln, verschiedene Werte annehmen kann. Wenn ich dagegen vor Jahren den Versuch gemacht habe,[3] der Urteilsdisposition des vergleichenden Subjektes unter dem Namen der „Unterscheidungsschärfe" auch der übermerklichen Verschiedenheit gegenüber eine die Gröfse der letzteren modifizierende Bedeutung zu wahren, so scheint mir solches heute für den wichtigsten der dabei in Frage kommenden Fälle aus einem prinzipiellen Grunde mehr als bedenklich. Erkenne ich (durch evidentes Urteil) *a* und *b* als verschieden, und zwar, wie nach Obigem selbstverständlich, in bestimmtem Grade verschieden, so hängt dieser Grad mit Notwendigkeit an der

---

[1] A. a. O. S. 33.

[2] *Vierteljahrsschr.* 1882. S. 287.

[3] „Über Sinnesermüdung im Bereich des WEBERschen Gesetzes". *Vierteljahrsschr.* 1888. S. 21.

Beschaffenheit von *a* und *b*. Die mit Evidenz erkannte Verschiedenheit ist die Verschiedenheit von *a* und *b*, und „erscheint" nicht etwa bloſs als solche. Es hat dann aber keinen Sinn, anzunehmen, daſs das nämliche *a* und *b* je nach Dispositionen des Vergleichenden bald mehr, bald weniger verschieden wäre.[1] Dagegen wird für evidenzlose Vergleichungsurteile, deren Möglichkeit namentlich für den Fall untermaximaler Aufmerksamkeit doch nicht wohl in Abrede zu stellen sein möchte, der Gedanke an einen Einfluſs der Subjektivität auch auf die Gröſse der dem betreffenden Urteile zu Grunde liegenden „vorgestellten" Verschiedenheit mindestens nicht vorgängig von der Hand zu weisen sein.[2]

Darf man sonach im allgemeinen darauf rechnen, daſs bei Verschiedenheit der Unterschiedsempfindlichkeit (im weiteren Sinne) eben merkliche Verschiedenheiten nicht gleich sein werden, so bedeutet im Gegensatze hierzu Gleichheit der

---

[1] Der Einwand trifft, wenn ich recht sehe, zugleich auch FECHNERS sog. „Unterschiedsmaſsformel". (*Elemente*. Bd. II. S. 96 ff.), sofern diese, von erst weiter unten zu erwägenden Schwierigkeiten ganz anderer Art noch abgesehen, zusammen mit der „Unterschiedsformel" (vergl. unten § 31) die Konsequenz in sich schlieſst, „daſs allgemein der Empfindungsunterschied *U* die Unterschiedsempfindung *u* um einen gewissen, dem Logarithmus der Verhältnisschwelle *v* proportionalen Wert übertrifft" (vergl. FECHNER „Über die psychophysischen Maſsprinzipien und das WEBERsche Gesetz" in *Wundts Philos. Stud.* Bd. IV. S. 194). Ist „Unterschiedsempfindung" so viel als beurteilte (vielleicht wäre noch deutlicher zu sagen: geurteilte) Verschiedenheit, dann geht es nicht an, ihr die wahre Verschiedenheit als ein mit ihr nur funktionell Zusammenhängendes gegenüberzustellen. Auch den von RADAKOVIČ („Über FECHNERS Ableitungen der psychophysischen Maſsformel", *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1890. S. 21 ff.) der Natur dieser Funktion gewidmeten Untersuchungen steht dieses prinzipielle Bedenken entgegen.

[2] Der schwerfälligere Ausdruck „Inhalts- (oder Gegenstands-) Unterschiedsempfindlichkeit" scheint mir vor dem minder schwerfälligen Terminus „Unterscheidungsschärfe" den Vorzug zu haben, daſs darin auch äuſserlich die Zugehörigkeit zu dem hervortritt, was man sich nun einmal thatsächlich in den Sinn des Wortes „Unterschiedsempfindlichkeit" einzubegreifen gewöhnt hat. Dieser Sinn ist ja, falls ich meinem subjektiven Sprachgefühl nicht zu viel Geltung beimesse, natürlichst durch die Wendung: „Empfindlichkeit für Unterschied" wiederzugeben, wobei als zu „Empfindendes" nicht etwa die Reize, sondern der „Unterschied" (genauer die Verschiedenheit, vergl. unten § 21) gedacht ist, wie schon FECHNERS Termini „Unterschiedsempfindung" und „empfundener Unterschied" deutlich machen.

II. Zunächst unter der Voraussetzung, dafs der „Unterschied“ immer noch gröfser als B ist, läfst sich an ihm das eben gekennzeichnete Verfahren wiederholen, ebenso eventuell am zweiten so gewonnenen Unterschiede u. s. f., bis man eben zu einem Unterschiede kleiner als B gelangt. Das charakteristische Ergebnis dieses Verfahrens ist jedenfalls eine Zahl, nämlich die Anzahl Unterschiedsbestimmungen (resp. Unterschiede), zu welchen das A dem B vermöge der Gröfse dieser beiden Gelegenheit giebt. Für die in Rede stehende Relation zwischen A und B aber ist das Symbol $A : B$, sowie die Benennung „geometrisches Verhältnis“ gebräuchlich. Die Weiterführung des skizzierten Verfahrens unter besonderen Voraussetzungen, wie namentlich der, dafs für A und B Zahlen eintreten, bedarf keiner besonderen Darlegung. Ohne die in diesem Falle möglichen Präzisierungen und wohl auch Umdeutungen kommt bei diesem Verfahren der allfällige letzte Rest nicht zur Geltung, falls ihm nicht schliefslich noch im Sinne des Verfahrens I Rechnung getragen wird.

Dem Umstande gegenüber, dafs es herkömmlich ist, arithmetische wie geometrische Verhältnisse durch Zahlen zu bestimmen, mufs gefragt werden, ob uns nicht schon hier Instanzen gegen die oben freilich nur vorübergehend ausgesprochene Behauptung entgegentreten, dafs es aufser Verschiedenheit (und Ähnlichkeit) keine Relationen gebe, die Gröfsen sind. In der That ist es ja völlig korrekt, $4 - 2 = 2$, oder $6 : 2 = 3$ zu setzen u. dergl.; aber sollte, was da der 2 oder 3 gleich gesetzt wird, wirklich die Relation sein, der dann freilich Gröfse zukommen müfste? Es hätte doch gar keinen Sinn, eine Relation einer Zahl, die natürlich stets eine Komplexion ist, gleichzusetzen; — unter welchen ganz besonderen Voraussetzungen Verschiedenheiten durch Zahlen „ausdrückbar“ sein mögen, davon soll weiter unten die Rede sein. Zudem ist, was bei obiger Anschreibung des arithmetischen Verhältnisses rechts vom Gleichheitszeichen steht, nur dann eine unbenannte Zahl, wenn auch links unbenannte Zahlen oder benannte ausschliefslich nach ihrem Zahlenwerte in Betracht kommen; und 2 Äpfel, 2 Meter oder 2 Stunden wird vollends niemand für Relationen halten. Die „unbenannte“ Zahl im Falle des geometrischen Verhältnisses aber hat im Grunde ja ebenfalls ihre, wenn auch unausgesprochene Benennung: sie sagt, wievielmal der oben

charakterisierte Vorgang der Teilvergleichung unter den gegebenen Umständen stattfinden kann, und die Gesamtheit dieser „Male“ ist wieder nichts weniger als eine Relation. Und in der That, hält man sich die Natur der Relation vor Augen, in welche zwei Gröfsen durch diese oder jene Art der Teilvergleichung zu einander treten, so läfst sich an derselben die Gelegenheit zu Steigerung oder Herabsetzung schlechterdings nicht finden. Dagegen führen diese Operationen allerdings auf Ergebnisse, die zwar nicht selbst Relationen, wohl aber Gröfsen und eventuell durch Zahlen ausdrückbar sind.

An dieses Ergebnis, das ja bei ausreichender Erweiterung der arithmetischen Grundbegriffe zu beliebiger Genauigkeit geführt werden kann, wird man sich zunächst auch der Thatsache gegenüber zu halten haben, dafs aus Gleichsetzung zweier „geometrischer“ Verhältnisse die neue, komplexere Relation der Proportionalität hervorgeht. Aber allerdings möchte dies für die Rolle, welche der Proportionalität allenthalben zukommt, nicht das einzig Mafsgebende sein. Wir werden weiter unten sehen, dafs der zu einem geometrischen Verhältnis gehörige Zahlenwert mit der Verschiedenheit der in dieses Verhältnis gesetzten Gröfsen in derart innigem Zusammenhange steht, dafs jener Zahlenwert unter Umständen sehr wohl als Repräsentant der Gröfse dieser Verschiedenheit dienen kann, insbesondere die Gleichheit zweier der in Rede stehenden Zahlengröfsen die Gleichheit der betreffenden Verschiedenheiten garantiert. Wirklich bedeutet Proportionalität oft in erster Linie Gleichheit der Verschiedenheiten; an der Auffassung jener Relationen, die zu diesen übereinstimmenden Ergebnissen geführt haben, kann das aber nichts ändern.

§ 13. Das Messen.

Niemand wird auf die Thatsachen der Teilvergleichung achten, ohne sofort auch an das Messen zu denken, redet man doch schon bei der rein rechnerischen Auswertung des geometrischen Verhältnisses in analoger Weise von der Mafszahl, wie man beim arithmetischen Verhältnisse vom Unterschiede spricht. Es gilt nun, das Verhältnis zwischen Messung und Teilvergleichung ausdrücklich festzustellen und daraus für die Messung die uns für das Weitere wichtigen Konsequenzen zu ziehen.

Alles Messen ist seiner Natur nach Teilvergleichung, aber es gehört mit zu dieser Natur, nicht nur Teilvergleichung zu sein. Ganz wesentlich kommen nämlich noch gewisse Operationen hinzu, die bestimmt sind, der Vergleichung eine ohne sie unerreichbare Exaktheit und Zuverlässigkeit zu geben: das „Auftragen“ einer Strecke, das Anlegen des Maſsstabes, das Anfüllen eines Hohlmaſses sind Operationen dieser Art; nicht minder gehören die mannigfaltigen Verrichtungen hierher, die der Sprachgebrauch unter dem Namen des Wägens von dem streng genommen in zu engem Sinne verstandenen Messen ausdrücklich zu sondern liebt. Trotz ihrer so weitgehenden Verschiedenartigkeit dienen alle diese Verrichtungen in ganz unverkennbarer Weise dem einen gemeinsamen Zwecke der Bestimmung von Gleichheiten; sie kommen damit der Vergleichungsthätigkeit gerade dort zu Hülfe, wo eine solche mit Rücksicht auf die im Schwellengesetze hervortretende Unvollkommenheit menschlicher Erkenntnisfähigkeit vor allem not thut.

Es kann Denjenigen, der gewohnt ist, die wesentlich psychische Natur eines jeden Erkenntnisaktes stets im Auge zu behalten, fürs erste ein wenig befremden, wie Vorgänge wesentlich physischer Natur im stande sein sollen, jene psychischen Leistungen auf ein, gelegentlich noch dazu so beträchtlich höheres Niveau zu erheben. Indes genügt ein Blick auf die Bedeutung etwa des einfachsten Aufeinander- oder Aneinanderlegens, hierüber ins klare zu kommen. Für die Zuverlässigkeit einer Vergleichung sind, wie wir sahen, die äuſseren Umstände, unter denen sie sich vollzieht, und insbesondere die Raum- und Zeitlage des zu Vergleichenden durchaus nicht gleichgültig: räumlich und zeitlich Nahes vergleicht sich leichter als Fernes; es müſste also schon ein Verfahren zur Herstellung der günstigsten äuſseren Vergleichungsbedingungen die Aussicht auf zuverlässige Ergebnisse erhöhen. Nun wäre aber mit dem Hinweise hierauf im vorliegenden Falle doch kaum das Wesentliche getroffen. Man kann ja nicht sagen, daſs, wenn ich einen Maſsstab etwa von der Länge eines Dezimeters an eine zu messende Linie anlege, dadurch die Situation geschaffen ist, in der sich die durch den Maſsstab repräsentierte Strecke mit der an der zu messenden Linie durch dieses Anlegen herausgehobenen Teilstrecke am

besten vergleichen liefse. Der Messende denkt auch gar nicht daran, hier Strecken zu vergleichen, sondern beschränkt sich darauf, die Punkte der Linie zu beachten, eventuell zu fixieren, die mit dem Anfangs- und Endpunkte des Mafsstabes „zusammenfallen“. Allerdings ist er aber zugleich überzeugt, dafs das in dieser Weise abgeschnittene Stück der zu messenden Linie viel genauer der Länge eines Dezimeters entspricht, als, von unwahrscheinlichsten Zufällen abgesehen, mit Hülfe des „blofsen“ Augenmafses zu erzielen wäre. Und dieses Zutrauen ist vollberechtigt: es beruht auf der Erfahrung, dafs wir, mehr kurz als genau geredet, Orte schärfer unterscheiden als Ausdehnungen. In gleicher Weise wird, wer einen gegebenen Abstand mit Hülfe des Zirkels auf einer Linie „aufträgt“, eine besondere Vergleichung des vorgegebenen mit dem aufgetragenen Abstande sicher nicht vornehmen; von der Gleichheit der beiden Abstände aber wird er ohne weiteres in dem Mafse überzeugt sein, als er ein gutes Zutrauen darauf hat, dafs die Zirkelspitzen den rechten Abstand erhalten haben und während der Bewegung des Zirkels von einem Orte nach einem anderen in unverändertem Abstande gegeneinander geblieben sind. Ähnliches liefse sich natürlich nun auch von anderen Gestalten des Messens darthun, so dafs man zusammenfassend sagen kann: die Mefsoperationen sind Verfahrungsweisen, eventuell auch ohne ausdrückliche Vergleichung Gleichheiten mit gröfserer Zuverlässigkeit festzustellen, als der Unvollkommenheit unserer Vergleichungsfähigkeit nach durch direktes Vergleichen ohne solche Hülfsmittel zu erzielen wäre. Ihren Wert gewinnen die so ermittelten Teilgleichheiten dann dadurch, dafs damit die Voraussetzungen zur Feststellung jener Relationen gewonnen sind, von denen oben als Relationen durch Teilvergleichung die Rede war. Umgekehrt wird der Wert der Teilvergleichung nicht zum geringsten darin zu finden sein, dafs sie die Formen darbietet, um die Ergebnisse der Messung zusammenzufassen und durch Rechnung weiterzuführen.

Da es immer noch Theoretiker giebt, denen die Anerkennung psychischer Thatsachen besten Falles als ein notwendiges Übel erscheint, das auf das Minimum des Zulässigen zu reduzieren, stets im Interesse wissenschaftlicher Strenge wäre, so mag es an dieser Stelle nicht überflüssig sein, dem

eben Dargelegten gegenüber ausdrücklich das Misverständnis auszuschliefsen, als hätte man im Messen das Mittel gefunden, sich des im direkten Vergleichen nun einmal unverkennbar vorliegenden Anteils des Psychischen zu entledigen, die psychischen Leistungen ohne Rest durch physische zu ersetzen. Denn sind auch die Messungsoperationen, wie berührt, zumeist physischer Natur, so kommt ihnen ihr Wert eben doch nur insoweit zu, als ihren Ergebnissen eine Bedeutung beizulegen ist, die sich in einem anderen Sinne als dem einer psychischen Thatsache nun und nimmer erfassen läfst. Was hätte auch das Aufeinanderlegen zu besagen, wäre es nicht das Mittel, die betreffenden Strecken eventuell zur „Deckung“ zu bringen? Und welchen Anlafs hätte man, sich bei der Thatsache einer solchen Deckung aufzuhalten, wüfste man nicht, dafs, was sich genau „deckt“, auch für genaueste Vergleichung stets nur Gleichheit ergeben könnte? Das Messen als einen rein physischen Vorgang ansehen, hiefse demnach soviel, als etwa meinen, Addieren und Multiplizieren werde dadurch in ein Physisches umgewandelt, dafs sich beides an der Rechenmaschine verrichten läfst. — Vielleicht verdient hier nebenbei noch angemerkt zu werden, dafs es überdies sehr wohl auch Messungsoperationen geben kann, die ausschliefslich innerhalb psychischen Geschehens verlaufen. Bei rasch aufeinanderfolgenden Geräuschen, etwa dem Ticken einer Taschenuhr, erweist es sich bekanntlich oft als bequem, statt jedes einzelne der betreffenden Geräusche zu zählen, dieselben in Gruppen zusammenzufassen und an diesen die Zählung vorzunehmen; beim Zählen von Schwebungen insbesondere ist dies oft geradezu das einzige Mittel, zum Ziele zu gelangen. Herkömmlich ist es nun freilich nicht, solches Vorgehen Messen zu nennen; aber die Wesensgleichheit liegt zu Tage, obwohl dabei physische Hülfsmittel, wie etwa das Niederlegen je eines Fingers nach Ablauf je einer Gruppe zwar oft vorteilhaft, aber sicher durch nichts gefordert sind.

Nun erwächst jedoch aus dem Nachdruck, mit dem der Anteil des Psychischen an allen Messungsthatsachen betont wird, eine Art Gerechtigkeitsverpflichtung, zugleich ebenso rückhaltslos einzuräumen, dafs jene ihrer Natur nach zumeist physischen Operationen es sind, auf die zum allergröfsten Teile jener Exaktheitsvorzug zurückgeht, der manchen Wissens-

gebieten mit Recht nachgerühmt werden darf. Sich selbst überlassen bleibt die Vergleichungsthätigkeit dem Schwellengesetze gegenüber gleichsam wehrlos: der gröſste Scharfsinn vermöchte, falls er nicht etwa weit über die durch die Erfahrung gezogenen Grenzen hinaus gesteigert gedacht würde, für Zirkel oder Maſsstab keinen Ersatz zu bieten. Freilich verlangt dieser Exaktheitsvorzug ein Opfer, das mindestens erkenntnis-theoretisch von prinzipiellster Bedeutung ist: er ist nur um den Preis jener Apriorität zu erreichen, welche unter günstigen Umständen die Ergebnisse des direkten, nicht auf äuſsere Hülfen gestützten Vergleichens auszeichnet. Vergleiche ich zwei Objekte A und B, und gelange ich auf diesem direkten Wege zur Einsicht in ihre Verschiedenheit, so ist die so gewonnene Erkenntnis von aller Erfahrung — auſser etwa derjenigen, die mich mit den Inhalten A und B versehen hat, — unabhängig, in diesem Sinne also durchaus apriorisch. Stelle ich hingegen durch Messung fest, daſs B etwa fünfmal in A enthalten ist, so sind zum mindesten über die Konstanz des Maſsstabes während der Messungsoperation Voraussetzungen gemacht, die in anderem als in diesbezüglichen Erfahrungen nicht begründet sein können, dadurch aber auch dem Messungsergebnis den Charakter der von der Erfahrung abhängigen, also der empirischen Erkenntnis aufdrücken. Praktisch wird der hierin implizierte Verlust an Sicherheit natürlich um so weniger in Betracht kommen, je mehr sich selbst die apriorischeste aller Wissenschaften, die Mathematik, schon nach den allerersten Schritten vermöge der Unvollkommenheit des menschlichen Intellektes auf empirische Hülfen angewiesen findet,[1] ohne dabei praktisch merklichen Schaden zu nehmen.

§ 14. Unmittelbare und mittelbare Messung.

So einfach dem Gesagten zufolge alles Messen seinem Grundgedanken nach ist, so werden ihm doch durch die Bedürfnisse der Praxis konkrete Aus- und Umgestaltungen aufgedrängt, von denen hier als von den verschiedenen Arten des Messens kurz die Rede sein muſs.

Im Bisherigen wurde stillschweigend vorausgesetzt, das „Maſs“ könne an das zu Messende sozusagen unmittelbar

[1] Vergl. Ehrenfels in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* Jahrg. 1891. S. 311 ff.

herantreten, zu diesem unmittelbar in die erforderliche Beziehung gesetzt werden. Dies wird jedoch oft nicht leicht genug, oft auch gar nicht ins Werk zu setzen sein, und in solchen Fällen empfiehlt es sich, die Messung an einem Stellvertreter des zu Messenden vorzunehmen. Gilt es, die Länge einer Linie zu bestimmen, welche eine Seite in einem Quadrat ausmacht, so kann ich, wenn aus irgend einem Grunde eine andere der Quadratseiten der Messung leichter zugänglich ist, ganz gut an dieser statt an jener die Messung vornehmen; ich hätte natürlich ebensogut die Messung an einer halb oder einer doppelt so langen Linie vornehmen können, wenn eine solche Linie nebst ihrem Gröſsenverhältnis gegenüber der zu messenden Linie gegeben gewesen wäre. Es giebt Umstände, durch welche diese Art des Vorgehens ausnahmslos geboten erscheint: das Wägen ist ein einfaches Beispiel hierfür. Faſst man das Wägen, wie man doch wohl muſs, als ein Vorgehen, dazu bestimmt, das Gewicht eines Gegenstandes zu messen, so ist sofort auffällig, daſs, was man hier durch Auflegen von bekannten Gewichten auf die eine Wagschale zusammensetzt und in dieser Weise bestimmt, niemals das Gewicht des betreffenden Körpers selbst, sondern in der Regel bloſs ein vermöge der Konstruktion der Wage genau gleiches Gewicht ist, ausnahmsweise jedoch, wie bei der Dezimal- und sogenannten Schnellwage, ein beträchtlich davon verschiedenes sein kann, dessen Gröſse zu der des zu messenden Gewichtes in einem mehr oder weniger einfachen, jedenfalls aber bekannten funktionellen Verhältnisse steht. Ich will Messungen dieser Art als mittelbare Messungen denen ohne Stellvertretung als unmittelbaren Messungen gegenüberstellen.

Übrigens sei der Aufstellung dieser Einteilung sogleich die Bemerkung beigefügt, daſs ihr eine erhebliche praktische Bedeutung deshalb nicht wohl zukommen wird, weil es nicht selten von ganz nebensächlichen Umständen, ja geradezu von Zufällen abhängen kann, ob eine Messung unmittelbar oder mittelbar, und im letzteren Falle, ob sie mehr oder weniger mittelbar, d. h. von unmittelbaren Messungsvorgängen durch mehr oder weniger Zwischenglieder getrennt, stattfindet. Von theoretischem Interesse ist dagegen die Frage nach der Eignung für unmittelbare Messung. Ohne Zweifel kommt in dieser Beziehung dem Raume eine Vorzugsstellung zu; mir schiene

indes zu weit gegangen, wollte man Räumliches als das allein unmittelbar Meſsbare bezeichnen.[1] Daſs nämlich im besonderen Zeit oft genug an Raum, also mittelbar gemessen wird, steht ja fest und hat an der Verwendung der Uhr ein ausreichend deutliches Beispiel. Aber schon, wer eine Zeitstrecke nach Pendelschwingungen miſst,[2] nimmt die Teilung und Teilvergleichung nicht an einer Raumstrecke, sondern an der zu messenden Zeitstrecke selbst vor, wenn auch, soweit die Amplitude der Schwingungen in Frage kommt — aber auch nur so weit — mit Hülfe einer (günstigen Falles) gleichbleibenden Raumstrecke. Noch auffälliger wird übrigens die prinzipielle Unabhängigkeit der betreffenden Zeit- von der Raummessung, wenn nicht die Pendelschwingungen mit dem Auge verfolgt, sondern vielleicht Pendelschläge, etwa auch Schwebungen oder sonstige Gehörsdaten, gezählt werden. Zweifel an der Möglichkeit unmittelbarer Zeitmessung könnten leicht auf dem Miſsverständnis beruhen, daſs man unvermerkt dort unmittelbare Vergleichung fordert, wo man doch nur den Thatbestand unmittelbarer Messung ins Auge fassen soll; wirklich ist in den eben berührten Beispielen von unmittelbarer Vergleichung der einzelnen Zeitabschnitte untereinander oder mit einem „Zeitmaſsstabe" nicht die Rede. Aber die obigen Darlegungen über das Wesen der (zunächst unmittelbaren) Messung dürften bereits deutlich gemacht haben, daſs, so gewiſs alles Messen wie alles Vergleichen in letzter Linie auf unmittelbares Vergleichen hinauslaufen muſs, es doch gerade die Hauptaufgabe des Messens bleibt, den Unzuverlässigkeiten des unmittelbaren Vergleichens durch Einschieben angemessener Zwischenvorgänge möglichst abzuhelfen.

§ 15. Eigentliche und surrogative Messung.

Nun muſs es aber auch Messungen geben, auf welche die obige Charakteristik der mittelbaren Messung so wenig Anwendung findet als die der unmittelbaren. Eine einfache Erwägung genügt, dies darzuthun. Ist alle Messung, so wie wir sie bisher kennen gelernt haben, Teilvergleichung, so können

[1] So z. B. Fechner, *Philos. Stud.*, Bd. IV. S. 217 f., wohl auch Lipps, *Grundzüge der Logik.* S. 121 f.

[2] Vergl. Kries in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1892. S. 281.

selbstverständlich nur solche Gröfsen mefsbar sein, die in gleichbenannte Teile zerlegbar sind, also die bereits oben im besonderen so genannten teilbaren Gröfsen. Nun nimmt man aber bekanntlich gar keinen Anstand, etwa Distanzen oder Verschiedenheiten zu messen, obwohl, wie schon einmal zu berühren Gelegenheit war, alle Relationen einfach, insbesondere Verschiedenheiten jedenfalls nicht aus Verschiedenheiten zusammengesetzt sind. Auch Temperaturhöhen[1] und Geschwindigkeiten werden gemessen, obwohl keine Temperatur aus Temperaturen, keine Geschwindigkeit aus Geschwindigkeiten besteht. Wir haben es hier also offenbar mit einer Erweiterung des Mafsbegriffes zu thun, und es gilt, nun auch die Klasse von Messungsvorgängen zu charakterisieren, in welcher diese Erweiterung zur Geltung kommt.

Der für uns ohnehin besonders wichtige Fall der Messung von Distanzen biete hierzu den Ausgangspunkt. Man kann, das steht aufser Zweifel, nicht eine Verschiedenheit nehmen und sie auf eine andere Verschiedenheit einmal oder mehrere Male „auftragen“; was meint man also, wenn man die eine Verschiedenheit etwa doppelt so grofs nennt? Fafst man zunächst etwa räumliche oder zeitliche Verschiedenheiten oder, wie man hier in besonderer Weise ungezwungen sagen kann, Fälle räumlicher oder zeitlicher Distanz ins Auge, so könnte vor allem die Einführung des Wortes „Distanz“ die Neigung erwecken, das von der Verschiedenheit anstandslos Zugegebene in Bezug auf die „Distanz“ zurückzunehmen. Warum sollte ich nicht eine Distanz zwischen zwei Zirkelspitzen nehmen, auf einer Linie n-mal auftragen und auf diese Weise eine n-mal so grofse Distanz erhalten können? Die Weite des Sprachgebrauches, der solche Ausdrucksweise ohne den Schein besonderer Ungenauigkeit gestattet,[2] verrät, wie mir scheint, deutlich genug die Stelle, an der der Messungsgedanke in der uns bereits bekannten, sozusagen ursprünglichen Gestalt einsetzen kann. Ist die „Distanz“, welche ich zwischen die Zirkelspitzen nehmen und übertragen kann, zunächst und in erster Linie

---

[1] Allfälligen Bedenken gegen die Berechtigung des Ausdruckes „Temperaturmessung“ dürfte durch die folgenden Ausführungen wohl ausreichend Rechnung getragen werden.

[2] Vergl. auch A. Höfler in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1890. S. 497 f.

wirklich eine Verschiedenheit und nicht vielmehr eine Strecke, deren Anfangs- und Endpunkt allerdings eine durch die Länge der Strecke völlig bestimmte Verschiedenheit aufweist? Jede Raum- oder Zeitstrecke zerfällt in Strecken und ist darum mefsbar im eigentlichsten Sinne. Jeder Raum- oder Zeitstrecke gehört ferner eine Raum- resp. Zeitdistanz zu, der ganzen Strecke wie ihren Teilstrecken. Und zwar ist nicht nur jeder Streckengröfse eine Distanzgröfse, sondern auch jeder Distanzgröfse eine Streckengröfse zugeordnet. Es liegt unter solchen Umständen nahe genug, was so notwendig zusammengeht, nicht streng auseinanderzuhalten, und von Messung der Distanzen zu reden, wo man zunächst nur von Messung der zugeordneten Strecken reden dürfte. Man könnte dergleichen nun freilich einfach als Ungenauigkeit des Ausdruckes verwerfen, würde man nicht durch andere, unter ganz analogen Umständen sich vollziehende Überschreitungen der in unserer ersten Charakteristik des Messens gezogenen Schranken darüber belehrt, dafs es ganz bestimmte Bedürfnisse sind, die hierbei zu ihrem guten Rechte gelangen.

Was hat man sich denn eigentlich bei der Behauptung zu denken, dafs das Thermometer die Wärme zu „messen" bestimmt ist? Gemessen im eigentlichsten Wortsinne wird hier doch nur die Quecksilbersäule an einem allerdings in besonderer Weise angefertigten Mafsstabe; der Zusammenhang mit der Temperatur wird nur dadurch hergestellt, dafs einer bestimmten Höhe der Quecksilbersäule eben ein bestimmter Temperaturzustand entspricht, und dafs mit der Steigerung und Herabsetzung der Länge dieser Säule auch am Temperaturzustande ihrer Umgebung sich etwas steigert resp. herabsetzt. Die Annahme eines Parallelismus in den Veränderungen mufs dabei nicht einmal so gar wesentlich sein; sonst müfste es dem Alltagsdenken, dem bei „Wärme" doch jederzeit die sensible Qualität vorschwebt, mehr Schwierigkeit bereiten, mit dem „Sinken" des Quecksilbers eventuell auch ein „Steigen", das der Kälte nämlich, in Verbindung zu bringen. Jedenfalls kann man also sagen: die Wärme gilt hier für „gemessen", sobald ein anderes gemessen ist, dessen verschiedene Zustände mit den Wärmezuständen in empirisch festgestellter Regelmäfsigkeit koexistieren.

Und wie geht schliefslich das Messen der Geschwindigkeit

vor sich? Bekanntlich so, dafs man Weg und Zeit mifst und die erhaltenen Mafszahlen durch Division (der ersten Mafszahl durch die zweite) verbindet. Wäre im Sinne einer früher besprochenen Annahme Geschwindigkeit selbst nichts anderes als Weg und Zeit, so hätten wir hier nichts als zwei Messungen im engsten Sinne vor uns, und nur die Division wäre eine schwer verständliche Zuthat. Ist aber Geschwindigkeit, wie oben zu zeigen versucht wurde, thatsächlich etwas anderes als „Weg und Zeit“, dann stellt das Messen der Geschwindigkeit wieder einen Fall dar, wo etwas für gemessen gilt, sobald ein anderes gemessen ist, das mit ersterem in ausreichend enger Verbindung steht. Die Verbindung ist diesmal keine blofs erfahrungsmäfsige, sondern eine ersichtlich notwendige: Geschwindigkeit ist eine Komplexion aus Weg und Zeit; ebenso ist der Quotient aus den zugehörigen Mafszahlen eine Komplexion aus diesen, allerdings eine ganz andere als die Geschwindigkeit, aber eine, deren Natur zusammen mit der der Geschwindigkeit garantiert, dafs jedem Werte dieses Quotienten eine bestimmte Gröfse der Geschwindigkeit entspricht, und dafs Steigerung und Herabsetzung der einen Gröfse stets mit entsprechender Steigerung und Herabsetzung der anderen Gröfse Hand in Hand geht.

Dafs man in Fällen, wie diese drei Beispiele uns deren vorführen, es mit etwas von der oben beschriebenen mittelbaren Messung völlig Verschiedenem zu thun hat, leuchtet auf den ersten Blick ein. Dennoch könnte man zunächst versuchen, den Unterschied in einen relativ äufserlichen Umstand zu verlegen, in die Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit des die Messung ermöglichenden Zwischengliedes mit dem zu Messenden. Auch in den drei letzten Fällen liegt nämlich ein solches Zwischenglied vor: während aber bei dem, was oben mittelbare Messung genannt wurde, die Linie mit Hülfe einer, sei es gleichen, sei es ungleichen Linie, das Gewicht mittelst Gewicht gemessen wurde, fanden wir in den drei letzten Fällen Distanz an Strecke, Temperatur an räumlicher Ausdehnung, Geschwindigkeit an räumlicher zusammen mit zeitlicher Ausdehnung gemessen. Nun versagt aber das Gleichartigkeitskriterium bei mehr als einer Gelegenheit seinen Dienst, indem es Fälle, deren Zugehörigkeit zur „mittelbaren Messung“ ohne weiteres klar ist, entweder ganz eindeutig in die Analogie zu den drei letzten Beispielen drängt, od [illegible] einer Sache der Willkür



macht, sie dieser Analogie oder der mittelbaren Messung im obigen Sinne zuzuweisen. Ersteres würde z. B. von der Bestimmung des Flächeninhaltes etwa eines Dreieckes aus Grundlinie und Höhe gelten, die beide als Linien von der Flächengröfse, die sie messen helfen, toto genere verschieden sind. Letzterer Fall dagegen würde vorliegen, wo die Länge einer Dreiecksseite durch Messung der beiden anderen Seiten, sowie des von diesen eingeschlossenen Winkels bestimmt wird. Solche Messung müfste, sofern man dabei von Seitengröfsen ausgeht und auch zu Seitengröfsen gelangt, als mittelbare Messung im obigen Sinne bezeichnet werden, dagegen unseren drei Beispielen zuzugesellen sein, sofern die Messung doch auch von einer Winkelgröfse ihren Ausgang genommen hat. Man wird solchen Gegeninstanzen gegenüber sich auch nicht wohl auf den Sprachgebrauch berufen dürfen, der freilich Messen und Berechnen auseinanderhält: es wäre ja sehr fraglich, ob nicht auch schon manches von dem, was oben als mittelbare Messung behandelt wurde, sprachgebräuchlich zwangloser als Berechnung zu bezeichnen wäre.

In der That, gilt es, den durch die drei Beispiele illustrierten Thatbestand gegenüber dem der mittelbaren Messung zu kennzeichnen, so ist es ziemlich nebensächlich, ob der Stellvertreter oder Quasi-Stellvertreter dem zu Messenden auch wirklich wesensgleich ist.[1] Entscheidend dürfte dagegen überall sein, ob durch das Ergebnis der betreffenden Operation das zu Messende auch wirklich für eigentlich gemessen gelten kann oder nicht, — anders ausgedrückt, ob die Natur des zu messenden Gegenstandes eine Messung in dem oben festgestellten eigentlichen Sinne gestattet, und der aus was immer für Gründen eingeschlagene Umweg am Ende doch genau das ergiebt, was der gerade Weg, die unmittelbare Messung nämlich, unter günstigen Umständen ergeben müfste. Wo immer dies zutrifft, fehlt jeder Grund, von anderem als eben wieder von mittelbarer Messung

[1] Thatsächlich wird auch kaum jemand Anstofs daran genommen haben, dafs bereits oben (vgl. S. 67) die Messung der Zeit an räumlichen Bestimmungen ohne weiteres als ein Fall mittelbarer Messung in Erwägung gezogen worden ist, und zwar, wie im Hinblick auf eine am Schlusse des gegenwärtigen Paragraphen zu machende Bemerkung hinzugefügt sein mag, ohne Erweiterung der oben für mittelbare Messung getroffenen Begriffsbestimmung.

zu ziehen, und die Anwendung auf die Messung des Flächeninhaltes oder der Dreiecksseite bietet nun weiter keine Schwierigkeiten mehr. Zwar wird freilich niemand daran denken, etwa mit Hilfe ausreichend kleiner Quadrate eine, natürlich diesen Falles approximative unmittelbare Messung einer Dreiecksfläche zu versuchen; dennoch führt die Messung von Grundlinie und Höhe zu einer Messung dieser Fläche im eigentlichsten Sinne. Denn Flächeninhalte sind teilbare Größen; und könnte man eine geeignete Einheit auftragen, so müßte das Ergebnis mit dem durch Grundlinien- und Höhenmessung erlangten übereinstimmen. Vollends aber kann die Bestimmung der Seitenlänge wie immer gewonnen nur den Fall einer eigentlichen unmittelbaren Messung repräsentieren.

Ganz anders, wenn man gleichsam vor die Aufgabe einer Messung von Größen gestellt ist, die eine Messung im bisher bezeichneten Sinne ihrer Natur nach deshalb gar nicht zulassen, weil sie gar nicht teilbare Größen sind. Auch hier handelt es sich freilich, wie bei der mittelbaren Messung, um eine Art Stellvertretung, aber um eine ungleich weitergehende. Betrifft sie nämlich bei der mittelbaren Messung sozusagen nur den Weg, auf dem vorgegangen wird, so berührt sie in den zuletzt betrachteten Fällen das Ergebnis des Vorganges. Wird ein *A* mit Hilfe eines *B* mittelbar gemessen, so ist am Ende doch *A* das Gemessene, ganz ebenso, als wenn die Messung unmittelbar an *A* in Angriff genommen worden wäre. Dagegen ist, was aus Vorgängen von der letztbetrachteten Art hervorgeht, streng genommen gar nicht die Messung des *A*, vielmehr wird hier als Messung des *A* etwas bezeichnet, was eigentlich nur Messung eines *B* ist. Bei Messung der Distanz wird eigentlich nicht diese gemessen, sondern die zugeordnete Strecke, bei Messung der Temperatur nicht diese, sondern der Quecksilberstand, bei Messung der Geschwindigkeit nicht diese, sondern eine aus Weg und Zeit gebildete neue Komplexion. An Stelle des eigentlich zu messenden Gegenstandes, des Meßobjektes, wie man kurz sagen kann, ist ein Surrogat getreten, das eigentlich gemessen wird; ich stelle daher Messungen dieser Art als surrogative Messungen den früher betrachteten als eigentlichen Messungen gegenüber.

Es verdient ausdrücklich hervorgehoben zu werden, daß hier mit „Surrogat“ nicht dasjenige bezeichnet wird, woran

der Messungsakt unmittelbar angreift. Es kann mit letzterem zusammenfallen, wie das Beispiel von der Distanz und das von der Temperatur beweist; dort ist die Strecke, hier die Quecksilbersäule das Surrogat und zugleich das unmittelbar Gemessene. Dagegen werden im Beispiel von der Geschwindigkeit vielleicht Weg, eventuell auch Zeit unmittelbar gemessen; Surrogat ist hier aber jene Zahlengröſse, welche zu Weg und Zeit in der durch die bekannte Formel ausgedrückten funktionellen Beziehung steht. Hier wird also das Surrogat selbst mittelbar gemessen. Es mag dieser Hinweis noch ein Übriges thun, die prinzipielle Verschiedenheit der surrogativen von der mittelbaren, aber eigentlichen Messung ins Licht zu setzen.

Was das logische Verhältnis der so gewonnenen vier Klassenbegriffe anlangt, so ist aus dem Bisherigen wohl ausreichend klar geworden, daſs der Gegensatz des Unmittelbaren und Mittelbaren zunächst nur für die eigentliche Messung ins Auge gefaſst worden ist. Läſst man aber einmal die surrogative Messung ebenfalls als Messung gelten, dann ist sofort ersichtlich, daſs das Surrogat als solches jederzeit den Thatbestand der Vermitteltheit gewährleistet. Man kann dann auch zusammenfassend sagen: nur eigentliche Messung kann unmittelbar, nur mittelbare Messung kann surrogativ sein; zerfällt sonach eigentliche Messung in unmittelbare und mittelbare, so zugleich mittelbare in eigentliche und surrogative.

§ 16. Bedeutung und Bedingungen der surrogativen Messung.

Nun drängt sich aber doch vor allem die Frage auf, wie man denn eigentlich dazu komme, *A* in Fällen als gemessen zu bezeichnen, wo in Wahrheit doch *B* das Gemessene ist, — die Frage also, worin die vorliegende Erweiterung des Messungsbegriffes ihre Legitimation finde. Soweit ich sehe, liegt diese Legitimation einfach darin, daſs mit Hülfe des Surrogates die Vorteile, um deren willen Teilvergleichung und Messung bei teilbaren Gröſsen vorgenommen werden, sich unter günstigen Umständen zum gröſsten Teile auch unteilbaren Gröſsen zuwenden lassen.

Drei Dinge sind es ja doch wohl, welche der Messung teilbarer Gröſsen vor allem Wert verleihen, einmal der Ersatz eines aus einem Gröſsencontinuum herausgegriffenen, der ganzen

Unbeständigkeit eines kontinuirlich variablen Vorstellungsinhaltes ausgesetzten Datums durch ein Discretum, eine Zahlengröſse nämlich, welche die Unzukömmlichkeiten des kontinuirlich Variablen nur noch in der „Benennung“, in der Einheit also gleichsam zurückgedrängt und für die meisten Zwecke unschädlich gemacht aufweist. Hinzu kommt zweitens, daſs diese Zahlengröſse zu anderen in derselben Weise, d. h. auf Grund derselben Einheit gewonnenen Zahlengröſsen, in den nämlichen Gröſsenrelationen (das Wort im üblichen, vielleicht etwas zu engen Sinn verstanden) steht, wie die gegebene Meſsgröſse zu den betreffenden anderen Meſsgröſsen des nämlichen Continuums, — endlich drittens, daſs die absoluten Limitenwerte 0 und ∞, die für unteilbare Gröſsen so gut Geltung haben als für teilbare, für Meſsgröſse und Maſszahl zusammenfallen, sobald diese als Variable behandelt werden können. Man kann natürlich nicht sagen, daſs die benannte Maſszahl der Meſsgröſse gleich ist; man übersieht aber leicht, weshalb man sich bei den allermeisten Gelegenheiten mit besserem Erfolg an jene als an diese halten wird.

Nun ist aber aus den obigen Beispielen ersichtlich, daſs unter ausreichend günstigen Umständen mit Hülfe surrogativer Messung ganz Analoges zu erzielen ist; die Distanz partizipiert an allen Vorteilen der Streckenmessung, die Geschwindigkeit an allen Vorteilen der Messung des Quotienten aus Weg und Zeit. Bei weitem weniger leistet das Thermometer für die Kenntnis der Temperatur; der zweite und dritte der oben namhaft gemachten Erfolge des Messens fehlt hier gänzlich. Man ersieht daraus zugleich, daſs es bei der surrogativen Messung Vollkommenheitsgrade giebt und die Temperaturmessung einen Fall unvollkommener, man könnte sagen rudimentärer Messung repräsentiert.

Aus dem Gesagten muſs sich nun auch noch eine zweite Grundfrage beantworten lassen: sie betrifft die Bedingungen, denen ein Messungssurrogat als solches Genüge zu leisten hat. Vor allem ist hier mit Rücksicht auf das Beispiel von der Geschwindigkeit wohl nicht überflüssig, ausdrücklich zu bemerken, daſs es jedesmal nur ein Messungssurrogat giebt und nicht etwa deren mehrere. Zeit und Weg sind in dem eben erwähnten Falle nicht etwa selbst Surrogate; Anspruch auf diesen Namen hat hier vielmehr nur die aus Weg und Zeit als Bestandstücken

im Sinne der Quotientenformel gebildete Komplexion. Nur kann diese selbst natürlich nicht anders als mittelbar gemessen werden, und die Objekte, an denen die Messungsoperation eventuell unmittelbar angreift, sind eben die Bestandstücke Weg und Zeit.

Selbstverständlich ist ferner, daſs das Messungssurrogat eine Gröſse sein muſs und zwar, falls es nicht etwa auch seinerseits nur surrogativer Messung zugänglich ist, eine teilbare Gröſse. In betreff der qualitativen Beschaffenheit zeigen die thatsächlich als Surrogate verwendeten Gröſsen eine auſserordentlich weitgehende, durch vorgängige Bestimmungen kaum einzuschränkende Mannigfaltigkeit; nur dürfen, wie eben schon berührt, im Falle mittelbarer Messungen die Mittel nicht etwa auch in den Kreis dieser Mannigfaltigkeit aufgenommen werden.

Vor allem wichtig sind natürlich jene Relationen zwischen Surrogat und Meſsobjekt, auf Grund deren die surrogative Messung in betreff der drei oben erwähnten Hauptleistungen es der eigentlichen Messung gleich zu thun oder sich ihr anzunähern bestrebt ist. Unter allen Umständen unerläſslich ist die ausreichend bestimmte und eindeutige Zuordnung der Punkte des Surrogatcontinuums zu denen des Meſsobjektcontinuums; ob die Koexistenz durch Einsicht in deren Notwendigkeit oder nur durch die Empirie gewährleistet ist, dürfte dabei mehr theoretisch als praktisch von Belang sein, falls die etwaige Empirie nur zuverlässig genug ist. Ausreichen aber möchte diese Zuordnung für sich allein kaum in irgend einem Falle auch noch so unvollkommener Messung; sonst wären am Ende auch die Töne durch die Notenschrift gemessen, der es noch dazu keineswegs an allen Analogien zu dem, was sie bezeichnen soll, fehlt. Man kommt damit zum Erfordernis der Gleichheit der zusammengehörigen Gröſsenrelationen, von dem mindestens so viel unerläſslich sein dürfte, daſs die Steigerung oder Herabsetzung des einen stets mit Steigerung resp. Herabsetzung des anderen Hand in Hand gehen muſs. Soviel gilt ja im ganzen wohl auch von der Temperaturmessung; ist diese Geltung nicht von allem Bedenken frei, so wäre daraus nur zu entnehmen, daſs auch das Gebiet der Messung gegen bloſse Fixierung ohne Messung nur flieſsend abgegrenzt ist. Andererseits ist selbstverständlich, daſs, wenn man eine Gröſse surrogativ zu messen unternimmt, man darauf bedacht sein wird, ein Surrogat zu

wählen, das in betreff der zusammengehörigen Relationen und Grenzwerte dem, was die eigentliche Messung bietet, möglichst nahe kommt. Die Wahl wird dabei weniger die letzten, unmittelbaren Angriffspunkte für den Messungsvorgang zu betreffen haben, da diese in der Regel ziemlich eindeutig vorgegeben sind; um so weiteres Feld für theoretische Arbeit bietet die Funktion, durch welche die der Messung unmittelbar vorliegenden Gröfsen zu jener Komplexion vereinigt werden, die als Messungssurrogat dienen soll. Ein Blick auf die von KRIES so genannten „kombinierten Einheiten" unserer modernen Physik[1] läfst erkennen, was eine entwickelte Wissenschaft in dieser Richtung leisten kann.

Schliefslich sei der Vollständigkeit halber auch des selbstverständlichen Umstandes gedacht, dafs, weil das Messen, gleichviel, ob eigentliches oder surrogatives, am Ende doch jederzeit eine praktische Verrichtung ist, das Surrogat allemal einer solchen Operation auch zugänglich sein mufs. Ein Surrogat, das seinen Relationen nach die weitestgehenden Anforderungen zu befriedigen vermöchte, wird eventuell einem in dieser Hinsicht unvollkommeneren Surrogate hintanzusetzen sein, wenn dieses einer unmittelbaren oder mittelbaren, eigentlichen, eventuell auch surrogativen Messung leicht, jenes schwer oder gar nicht erreichbar ist.

Es wurde bereits berührt, dafs das Ergebnis einer surrogativen, wie das jeder anderen Messung sich als Zahl darstellt und zwar als benannte Zahl. Es ist beachtenswert, dafs die Sprache auch in betreff dieser Benennungen zwischen eigentlicher und surrogativer Messung keinen Unterschied macht. Unbedenklich redet man demgemäfs von einer Distanz oder Geschwindigkeit [illegible], von einer Distanz, die das 10fache, von einer Geschwindigkeit, die das 100fache der ersteren ist, trotz der Unteilbarkeit von Distanz und Geschwindigkeit. Es kann gelegentlich wichtig werden, des Umstandes eingedenk zu sein, dafs derlei in voller Stre[illegible] nicht von den betreffenden Mefsobjekten, sondern nur von [illegible]ren Surrogaten zutrifft.

Im Anschlusse hier[illegible] noch der Möglichkeit einer Art zahlenmäfsiger [illegible] Messung gedacht, die insofern besteht, a[illegible] Verschiedenheiten


[1] Vgl. Viertel[illegible]

sog. „disparater“ Gebiete[1] zu Erfolgen führt. Kann ich die Verschiedenheiten zwischen den Gliedern einer Gröſsenreihe (resp. Punkten eines Gröſsencontinuums) a, b, c ...... gleich, gröſser oder kleiner finden als die Verschiedenheiten zwischen den Gliedern einer anderen Reihe a^1, b^1, c^1 ......, so kann es prinzipiell wenigstens nicht unstatthaft sein, an Stelle der a^1, b^1, c^1 ...... die Reihe der natürlichen Zahlen zu setzen und die Punkte a, b, c ...... irgend eines Gröſsencontinuums derart auszuwählen, daſs etwa a von b gleich verschieden ist wie *1* von *2*, b von c gleich verschieden wie *2* von *3* u. s. f. Es wäre dann natürlich ganz einerlei, ob die betreffenden Gröſsen teilbar sind oder nicht; ja, streng genommen, könnte nicht einmal verlangt werden, daſs das Continuum jedesmal ein Gröſsencontinuum sei. Von den so gewonnenen Punkten hätte es dann einen bestimmten Sinn, zu sagen, a verhalte sich zu b wie *1* zu *2* u. s. f. Proportionalität könnte man das natürlich nicht nennen, aber es wäre immerhin etwas der Proportionalität Verwandtes.[2] Ob ein solches Verfahren irgend einmal zu praktischen Ergebnissen führen mag, bleibe hier dahingestellt; vielleicht hat aber die Möglichkeit eines solchen Verfahrens das Ihre dazu beigetragen, Objekte als eigentlich meſsbar erscheinen zu lassen, deren Natur einen Zweifel darüber, daſs sie in das Gebiet der teilbaren Gröſsen nicht gehören,[3] nicht wohl aufkommen lieſs.

[1] Vergl. oben S. 44.
[2] Vergl. unten § 28.
[3] Vergl. unten § 27.

Vierter Abschnitt.

Über Messung von Gröſsenverschiedenheiten.

§ 17. Allgemeines über Verschiedenheitsmessung. Aufgabe der folgenden Untersuchungen.

Was im vorhergehenden über Messung im allgemeinen festgestellt worden ist, soll nun dazu dienen, einem Spezialfalle von gröſster Wichtigkeit näher zu treten, als oben möglich war, wo derselbe nur als ein Beispiel neben anderen gleichgeordneten in Betracht gezogen werden konnte. So grundlegend bedeutungsvoll die Relation der Verschiedenheit für das Erkennen ist, so wichtig muſs es sein, Voraussetzungen und Bedingungen genauer kennen zu lernen, unter denen diese Relation messender Behandlung zugänglich ist.

Wir wissen bereits, daſs Verschiedenheit eine Gröſse ist, wir wissen aber auch, daſs sie zu den unteilbaren Gröſsen gehört, sonach keine eigentliche, sondern nur eine surrogative Messung gestattet. Zwar wurde dies oben zunächst nur in betreff räumlicher und zeitlicher Verschiedenheit behauptet; aber es darf wohl ohne weiteres für selbstverständlich gelten, daſs es mit anderen Verschiedenheiten auch nicht anders bewandt ist.

Nicht mit eben so viel Selbstverständlichkeit wird man verallgemeinern können, was sich oben in betreff der Natur des geeigneten Surrogates ergeben hat. Bei Raum und Zeit freilich ist der Schritt von der Distanz zur Strecke, wie wir gesehen haben, das Natürlichste, das sich denken läſst. Ist aber auch jeder anderen Verschiedenheit als solcher eine Strecke zu[illegible]ordnet, und wenn sie es ist, bietet sie ein auch praktisch [illegible] b[illegible]chbares Messungssurrogat dar, wie Raum- oder [illegible]

[illegible]h, von Ton- oder Farben- [illegible] wenn man sich auf das [illegible]

Ton- oder Farbencontinuum beruft, wirklich etwas wesentlich anderes im Sinne haben? Allerdings bietet, was die Verwirklichung eines solchen Continuums in einem bestimmten Individuum anlangt, das Schwellengesetz Gelegenheit zu begründeten Zweifeln: in der That garantiert dieses Gesetz, wie schon berührt, dafs eine völlig diskrete Reihe, wenn ihre Glieder nur wohl geordnet sind und deren Distanz ausreichend unter der Schwelle gelegen ist, für das betreffende Subjekt von einem Continuum im strengen Sinne für immer ununterscheidbar bleiben mufs.[1] Aber freilich giebt es auch eine Raum- und Zeitschwelle, und darauf, dafs etwa durch die Verwirklichung zweier Orts- oder Zeitbestimmungen auch die Wirklichkeit alles Zwischenliegenden gewährleistet sei, wird man sich nicht ohne weiteres berufen können. Nun kommt es aber für den Streckengedanken weit mehr auf dieses Dazwischenliegen als auf die Verwirklichung an; zwischen zwei Raum- oder Zeitpunkten „giebt es“ eine Strecke zunächst in dem Sinne, in dem es im regelmäfsigen Sechseck sechs kongruente gleichseitige Dreiecke giebt, die es ausmachen. Darf ich mich vorübergehend eines Ausdruckes bedienen, dessen grundlegende Bedeutung zu exponieren ich mir für eine andere Gelegenheit vorbehalten mufs, so kann ich einfach sagen: die Strecke zwischen zwei Raum- oder Zeitpunkten besteht, mag sie übrigens existieren oder nicht. Und in ganz demselben Sinne besteht auch das Continuum der Übergänge zwischen zwei distanten, d. h. eben nur zwischen zwei verschiedenen Farben, so gewifs jeder Farbe als Inhalt die Möglichkeit kontinuierlicher Veränderung zuzuschreiben ist. Die Farben- oder Tonstrecke ist also ebenso gesichert als die Farben- oder Tondistanz, und etwaige empirische Schranken in betreff des thatsächlichen Vorkommens dieses oder jenes Punktes können an dem Bestande dieser Strecken nichts ändern. Nur ist das anschauliche Erfassen solcher unräumlicher oder un-

---

[1] Nur dürfte man das Wesen der Schwelle nicht in sprungweisen Empfindungsänderungen suchen und daraufhin letztere aus ersterer erweisen wollen, ohne dem neuestens, auch von G. E. Müller (Bd. X. der *Zeitschr. f. Psychol.* S. 79 f.) erhobenen Einwande zu verfallen. Andererseits kann ich aber auch nicht finden, dafs dieser Einwand mehr vermöchte, als die Möglichkeit der Diskontinuität in ausreichend enge, jedoch immer noch endliche Grenzen einzuschliefsen.

zeitlicher Strecken, soweit überhaupt ausführbar, nichts weniger als leicht;[1] noch schwerer dürfte es sein, derlei Vorstellungen zur Grundlage eines praktischen Messungsverfahrens zu machen, das vor der direkten Vergleichung der Distanzen irgend etwas voraus hätte. So hat das Bestehen der betreffenden Strecken zwar jedenfalls den Wert, dem Gedanken der halben oder doppelten Distanz einen festen Sinn unterzulegen: als Messungssurrogate leisten aber Strecken, soweit sie nicht Raum- oder Zeitstrecken sind, weiter keine Dienste.

Nun giebt es aber auch Verschiedenheiten, deren Glieder eine Annäherung durch Variation ihrer Natur nach ausschliefsen, z. B. Farbe und Ton u. dergl., Fälle, die der Sprachgebrauch in das Geltungsgebiet des Ausdruckes „Distanz“ nicht leicht einzubeziehen scheint. Hier kann natürlich von Strecken überhaupt gar nicht die Rede sein, so dafs auch abgesehen von den erwähnten praktischen Schwierigkeiten dem Streckengedanken die Eignung, ein Messungssurrogat für Verschiedenheit ganz im allgemeinen darzubieten, abgesprochen werden mufs.

Man hätte, soweit ich sehen kann, keinen besseren Erfolg, wollte man sich um ein solches Messungssurrogat für alle Verschiedenheit anderswo umsehen. Aussichten auf eine günstigere, vielleicht auch ziemlich folgenreiche Beantwortung bietet dagegen die nämliche Fragestellung für den allerdings recht speziellen Fall, dafs die Glieder, für welche die Gröfse ihrer Verschiedenheit zu bestimmen ist, selbst Gröfsen eines und desselben Gebietes, und zwar noch näher, dafs sie mefsbare Gröfsen dieses Gebietes sind. Hier bieten nämlich die vorgegebenen benannten, selbstverständlich gleich benannten Mafszahlen eine natürliche Grundlage für die Bildung eines angemessenen Surrogates, da die Gröfse der Gröfsenverschiedenheit notwendig mit der Gröfse des Verschiedenen zusammen-

[1] Immerhin leistet die Bewegung in der Strecke, das Durchlaufen derselben gute Dienste. Vergl. die Aufstellung G. E. Müllers a. a. O. S. 85: „Sind α, β, γ, δ einfache Empfindungen von verschiedener Qualität, aber gleicher Intensität, so verhält sich der qualitative Unterschied zwischen α und β zu dem qualitativen Unterschiede zwischen γ und δ, wie sich die Zahl der Empfindungen, welche bei der auf dem kürzesten Wege stattfindenden stetigen Überführung von α in β durchlaufen werden, zu der Zahl von Empfindungen verhält, welche durchlaufen werden, wenn man γ auf dem kürzesten Wege stetig in δ überführt.“

hängt. Die Hauptaufgabe besteht hier aber im Sinne der früheren Ausführungen darin, die Funktion ausfindig zu machen, mit deren Hülfe aus den in Betracht gezogenen Gröſsen das Surrogat zur Messung ihrer Verschiedenheit zu gewinnen ist. Darf einmal diese Funktion als festgestellt gelten, dann ist nur noch Rechnung erforderlich, um nach eigentlicher Messung der betreffenden Gröſsen ihre Verschiedenheit zahlenmäſsig zu bestimmen.

Da Gröſsenverschiedenheiten ohne Zweifel in jenes oben besprochene engere Gebiet von Verschiedenheiten gehören, wo diesen notwendig Strecken zugeordnet sind, so bezieht sich die eben formulierte Aufgabe auf eine Messung, für welche, wenigstens der Theorie nach, in den zugeordneten Strecken Surrogate bereits vorliegen. Obwohl, wie wir sahen, ihrer praktischen Unzugänglichkeit halber nicht eigentlich für Messungen zu gebrauchen, haben sie unserer gegenwärtigen Aufgabe gegenüber doch den Wert eines Genauigkeitsideals, wenn man so sagen darf: wir werden uns der Lösung dieser Aufgabe um so näher erachten dürfen, je näher wir derjenigen Funktion kommen, vermöge welcher aus den vorgegebenen Gröſsen eine Komplexion entsteht, deren Gröſse der betreffenden Verschiedenheitsgröſse in Bezug auf die drei für die Messung wesentlichen Erfordernisse ebenso gegenübersteht, wie die zugeordnete Streckengröſse. Unter einer ganz unbedenklichen, fürs erste vielleicht noch gar nicht auffälligen Vorwegnahme erst unten ausdrücklich vorzunehmender Feststellungen könnte man auch sagen: denken wir uns die Streckengröſsen als Abscissen aufgetragen, so geht unsere Aufgabe dahin, eine derartige Funktion der distanten Gröſsen ausfindig zu machen, daſs die Kurve der den Streckengröſsen zugeordneten Werte dieser Funktion eine vom Ursprung des Koordinatensystems ausgehende gerade Linie ausmacht. Von den unendlich vielen in diesem Sinne in Frage kommenden Geraden hätte dann natürlich die der Ordinatenaxe nähere, d. h. mit der Abscissenaxe den gröſseren Winkel einschlieſsende, jederzeit den Genauigkeitsvorzug, der stets zur Geltung kommt, wenn eine nicht unmittelbare Messung ceteris paribus an einem Gröſseren statt an einem Kleineren vorgenommen werden kann. Übrigens ist vorauszusehen, daſs sich einstweilen nicht wohl Gelegenheit finden wird, auf Genauigkeitsnuancen dieser Art einzugehen;

wir dürfen zufrieden sein, wenn wir eine Funktion finden können, der die oben gekennzeichnete Stellung zwischen Abscissen- und Ordinatenaxe zusammen mit ihrer Geradlinigkeit mit einiger Zuversicht nachgesagt werden kann, mag der Winkel mit der Abscissenaxe übrigens welchen Wert immer zwischen 0^0 und 90^0, natürlich mit Ausschlufs dieser Grenzwerte selbst, aufweisen. Dient doch selbst das Koordinatensystem nur der Formulierung der Aufgabe, nicht aber ihrer Lösung, da uns nirgends Zahlenwerte für die Abscissen zu Gebote stehen. Zwar giebt es bekanntlich zahlenmäfsig bestimmbare Streckengröfsen, bei Raum und Zeit nämlich; gerade da aber sind die distanten Objekte, die Orts-, resp. Zeitpunkte, nicht mefsbar, ja nicht einmal Gröfsen. Strecken aber, zu denen sich Gröfsen verhalten wie Ortsbestimmungen zu Raumstrecken, man könnte kurz sagen: Strecken zwischen Gröfsen sind nirgends der Messung zugänglich. Wir sind also, indem wir nun auf eine nähere Bestimmung der gesuchten Funktion unser Absehen richten, darauf angewiesen, uns auf anderem Wege über die jeweilige Erfülltheit der drei Erfordernisse: Zuordnung, Übereinstimmung in betreff der Relationen und in betreff der Grenzwerte, zu orientieren.

§ 18. Das arithmetische Verhältnis.

Es sollen im Folgenden die Gröfsen, um deren Verschiedenheit es sich handelt, durch das Symbol G bezeichnet werden, jedesmal determiniert durch ein Indexzeichen, als welches sich die für die betreffende Gröfse geltende Mafszahl am natürlichsten darbietet. Als solche, selbstverständlich auf die nämliche Einheit bezogene, also gleichbenannte Mafszahlen mögen a und b gelten unter der allgemeinen Voraussetzung, dafs

$$G_a \leqq G_b, \text{ daher auch } a \leqq b$$

ist. Als Zeichen für die auf dem Wege surrogativer Messung zu gewinnende Mafszahl für die Verschiedenheit zwischen G_a und G_b diene der Buchstabe V, zu dessen beiden Seiten als Indices die Mafszahlen der distanten Gröfsen angefügt seien. Wir erhalten so für die Verschiedenheit (unter Einschlufs der Gleichheit als Grenzfall) das Symbol:

$${}_aV_b$$

und unsere Aufgabe besteht darin, die in dieser Weise symbolisierte Gröſse als Funktion der Variablen a und b darzustellen, genauer: die Funktion festzustellen, der gemäſs die Maſszahl ${}_aV_b$ von den Maſszahlen a und b abhängt.

Ohne Zweifel liegt es nun am nächsten, als solche Funktion die Differenz zwischen a und b in Erwägung zu ziehen; dafür spricht wohl schon die Bedeutung des Wortes „Differenz", das auſserhalb der Mathematik doch nichts Anderes als Verschiedenheit ausdrückt, nicht minder das Wort „Unterschied", das innerhalb des mathematischen Sprachgebrauches das Wort „Differenz" ersetzt, auſserhalb desselben aber ebenfalls für Verschiedenheit steht, wenn z. B. von dem „groſsen Unterschiede" die Rede ist, der zwischen der Kunstauffassung des Berufsmusikers und der des musikalisch ausreichend leistungsfähigen Dilettanten, zwischen einer Gebirgsfernsicht bei trübem und der bei heiterem Wetter besteht, u. dergl. „Wenn wir drei Empfindungen a, b und c", meint W. Wundt,[1] „so abstufen, daſs b genau die Mitte zwischen a und c hält,[2] so müssen wir selbstverständlich die absolute Gröſse des Unterschiedes zwischen a und b gleichsetzen der absoluten Gröſse des Unterschiedes zwischen b und c. Wir würden alle Prinzipien der Gröſsenvergleichung auf den Kopf stellen, wenn wir anders verführen."

Demgemäſs wäre also:

$$\text{entweder } {}_aV_b = C\,(a-b), \text{ oder } {}_aV_b = C\,(b-a),$$

wo C eine für das Folgende weiter gar nicht charakteristische, durch geeignete Wahl der Einheit eventuell auch zu beseitigende Proportionalitätskonstante bedeutet. Auch die nur das Vorzeichen betreffende Verschiedenheit der zwei möglichen Differenzen ist für uns belanglos, da es sich nur darum handelt, durch die Operation des Subtrahierens eine Gröſse zu bestimmen, überdies, wenn man sich einmal für die eine der beiden Eventualitäten entschieden hätte, ein Wechsel im Vorzeichen durch die eben gemachte Annahme, daſs a niemals gröſser als b gesetzt wird, ausgeschlossen ist.

Es kommt nun natürlich auf eine genauere Prüfung unserer

[1] *Philos. Stud.* Bd. II. S. 25; die Stelle wird zustimmend zitiert, z. B. von J. Merkel, ibid. Bd. V. S. 251.

[2] Damit kann doch nur gemeint sein, daſs a von b ebenso verschieden ist, als b von c.

Annahme an, und diese fällt im ersten Überschlage durchaus nicht ungünstig aus. Man kann ja allgemein sagen: je kleiner die kleinere, je gröſser die gröſsere der beiden in Betracht gezogenen Gröſsen ist, desto gröſser die Verschiedenheit, desto gröſser aber auch die Differenz. Ebenso für den entgegengesetzten Fall: je gröſser die kleinere, je kleiner die gröſsere der beiden Gröſsen, desto kleiner die Verschiedenheit und desto kleiner die Differenz. Mit der Gleichheit, also mit der Verschiedenheit von der Gröſse 0 wird auch die Differenz $= 0$; wird dagegen die eine der beiden Gröſsen unendlich, so wird auch die Differenz unendlich, und man wird nichts dagegen einzuwenden haben, daſs in gleicher Weise der Verschiedenheit des Unendlichen vom Endlichen unendliche Gröſse zuerkannt wird.

Wie nun aber, wenn die kleinere der beiden Gröſsen den Grenzwert Null erreicht? Die Differenz fällt dann zusammen mit der gröſseren der in Betracht gezogenen Gröſsen[1]; läſst sich das Nämliche von der Verschiedenheit behaupten? Wäre wirklich eine Strecke von 2 cm von einer Strecke von 1 cm ebenso verschieden, als letztere von 0 cm, von etwas also, das schon gar keine Strecke mehr, sondern nur noch ein Punkt ist? Das kann evidenter Weise niemand behaupten; jedermann sieht ein, daſs die Verschiedenheit zwischen 1 und 0 eine unverhältnismäſsig gröſsere ist, so daſs ihr auch die Verschiedenheit zwischen 1 und 3 oder zwischen 1 und 4 in keiner Weise nahe zu kommen vermag. Man hätte keinen besseren Erfolg, wollte man 5, 6 oder 10, 100 oder 1000 zum Vergleiche heranziehen. Die Verschiedenheit zwischen 1 und 0 ist gröſser, als irgend eine Verschiedenheit zwischen endlichen Gröſsen, oder auch: sie ist gröſser, als irgend eine endlich groſse Verschiedenheit, sie ist unendlich groſs; und nur solange man die eben erst zu prüfende Annahme, daſs Differenz und Verschiedenheit das Nämliche sei, bereits zur Voraussetzung macht, mag man Anstand nehmen, dies einzuräumen. Oder sollte jemand nach vorurteilsfreier Überlegung der Sachlage wirklich noch Neigung haben, etwa 2 cm von 0 cm doppelt so verschieden zu finden als 1 cm von 0 cm und andererseits auch wieder wie 1 cm von 2 cm? Wir stehen hier vor dem ersten Falle, in dem die

[1] „Die Unterschiede gegebener Werte von Null fallen mit den betreffenden Werten selbst zusammen", sagt FECHNER (*Philos. Stud.* Bd. IV. S. 196) an der Spitze seiner Ausführungen über Empfindungsmessung.

Differenz den von ihr erwarteten Dienst zur Lösung unserer Aufgabe augenscheinlich versagt.

§ 19.
Gleiche Differenz bei ungleicher Verschiedenheit.

Von weit umfassenderer Geltung ist nun aber noch ein zweiter Fall; er betrifft die Zuordnung zunächst der entsprechenden relativen, dann aber auch die der absoluten Daten (der für Relationen etwas wunderliche Ausdruck „absolut" mag hier der Kürze halber gestattet sein) auf dem Gebiete der Differenzen einerseits, der Verschiedenheiten andererseits. Wir betreten hier zum ersten Male im Zusammenhange dieser Untersuchungen den Bereich der vielbesprochenen Thatsachen, die man unter dem Namen des WEBERschen Gesetzes zusammenzufassen pflegt. Aber nicht, insofern es sich dabei um das Verhältnis von „Reiz und Empfindung" handelt: auf dieses kann erst später eingegangen werden, indes wir jetzt darauf angewiesen sind, die Thatsachen, in denen uns die Gröfsen als physische, deren Verschiedenheiten aber als psychische Thatbestände entgegentreten, mit Rücksicht auf aufser unserer gegenwärtigen Untersuchung stehende Komplikationen, die sie in sich schliefsen, fernzuhalten. Dazu scheint mir freilich etwa WUNDTs Vorgang, an Stelle der Reize die „zentralen Sinneserregungen" zu substituieren,[1] schon mit Rücksicht auf unsere so sehr hypothetische Bekanntschaft mit den letzteren ebensowenig empfehlenswert als desselben Autors bereits an anderer Stelle[2] berührter Versuch, die Empfindungsstärken durch deren Merklichkeitsgrade zu ersetzen.[3] Dagegen bieten die anschaulichen Vorstellungen teilbarer Gröfsen vermöge ihrer Inhalte direkt gegebene psychische[4] Gröfsendaten dar, die einerseits eine eigentliche Messung an gleichfalls direkt gegebenen psychischen Einheiten gestatten, andererseits natürlich auch Objekte direkter Vergleichung untereinander abgeben können. Sehe ich etwa eine Linie, so setzt sich ja auch mein Wahrnehmungsinhalt aus Teilinhalten zusammen, die als Inhalte von Linienwahrnehmungen zu betrachten sind; ein „Aufeinanderlegen" ohne physische

---

[1] *Physiol. Psychol.* 4. Aufl. Bd. I. S. 400.
[2] Vergl. oben S. 49.
[3] Vergl. hierzu auch GROTENFELT, a. a. O. S. 63 ff.
[4] Vergl. unten § 27.

Hilfsmittel geht es dann freilich nicht, aber die Heranziehung solcher Hilfsmittel wird den von der näheren Beschaffenheit der Beziehungen zwischen Physischem und Psychischem, zwischen Reiz und Empfindung, wie man gewöhnlich sagt, unabhängigen Sinn der Ergebnisse schwerlich in Frage stellen. Ähnliches möchte von Zeitstrecken- und, mutatis mutandis natürlich, auch von Zahlengröſsen, auch diese selbstverständlich nur innerhalb der Grenzen des anschaulich Vorstellbaren betrachtet, gelten. Von ihnen — übrigens nicht nur von ihnen, wie sogleich zu berühren — lehrt nun die Erfahrung einmal, daſs gleiche Differenzen derselben sehr wohl mit ungleichen Verschiedenheiten, dann auch, daſs gleiche Verschiedenheiten sehr wohl mit ungleichen Differenzen zusammengehen können.

Ersteres ist eigentlich schon Sache alltäglichster Erfahrung. Wer wüſste nicht, daſs, wenn man zu einem Centimeter noch einen hinzufügt, dieser „Zuwuchs" ganz beträchtlich mehr zu bedeuten hat, als wenn der eine Centimeter zu 6 cm hinzugefügt worden wäre. Nun ist allerdings ein Centimeter keine psychische, sondern eine physische Gröſse; darf man aber annehmen, daſs innerhalb gehöriger Grenzen den gleichen physischen Centimetern auch gleiche psychische, man gestatte vorübergehend den Ausdruck, entsprechen, so belehrt uns das in Rede stehende „Bedeuten" zugleich über den Anteil der nächsten Vergleichungssubstrate am Vergleichungsergebnis. Immerhin ist diese Bedeutung gelegentlich als ein Mehr an „Merklichkeit" aufgefaſst worden,[1] aber doch kaum in der Meinung, dadurch jedes Mehr an Verschiedenheit für diesen Fall in Abrede zu stellen;[2] überdies ist auf die Unzukömmlichkeiten bei einseitiger Bevorzugung des Merklichkeitsgedankens oben[3] bereits hingewiesen worden. Zudem spricht die direkte Erfahrung hier deutlich genug: 1 ist von 2, man kann dies auch ganz wohl von den Zahlengröſsen aussagen, erheblich verschiedener als 6 von 7, dennoch ist der Unterschied oder die Differenz in beiden Fällen von gleicher Gröſse.

[1] Vergl. Brentano, Psychol. I. S. 88.

[2] Dies erhellt wohl aus den Worten a. a. O. S. 89: „Nun ist offenbar der um eine Linie verlängerte Fuſs dem Fuſs ähnlicher, als der um eine Linie verlängerte Zoll dem Zoll." Gröſsere Ähnlichkeit wird doch nicht wohl ohne M[illegible]eit in Anspruch zu nehmen sein.

[3] Vergl. oben [illegible]

Ich habe, um ungelöste oder halb gelöste Schwierigkeiten eines ganz anderen Thatsachengebietes hier möglichst wenig hereinzuziehen, die obigen Aufstellungen zunächst ausdrücklich auf anschaulich Vorgestelltes bezogen. Es soll aber wenigstens nicht unerwähnt bleiben, dafs unanschaulich Vorgestelltes das Gesagte gelegentlich sogar noch mit gröfserer Evidenz zu bestätigen scheint. Dafs 1 und 2, gleichviel ob unbenannt oder gleichbenannt, weit mehr voneinander verschieden sind, als 100 und 101 oder gar 1000 und 1001, dafs der Übergang vom einen zum anderen im ersten Fall ungleich mehr zu bedeuten hat als in einem der übrigen Fälle, diese Einsicht drängt sich, gleichviel wie die Unanschaulichkeit der beträchtlichen Gröfsen daran mitbeteiligt ist, einem jeden ganz unwiderstehlich auf. Vielleicht fehlt uns auch bei gröfseren Zahlen oder Strecken nicht alle Anschaulichkeit; genauer: vielleicht liegen auch da noch anschauliche Vorstellungen im Bereiche des Möglichen, denen nur die vielfach erforderliche Bestimmtheit fehlt, ohne darum ihrer Verwendbarkeit zu Erkenntnissen Eintrag zu thun, bei denen diese Bestimmtheit entbehrlich ist.[1]

§ 20. Ungleiche Differenz bei gleicher Verschiedenheit.

Die zweite von den beiden angeführten Thatsachen, Gleichheit der Verschiedenheit trotz Ungleichheit der Differenz, findet sich eigentlich ganz direkt im Weberschen Gesetze ausgesprochen, unter letzterem hier und in der Folge nichts als das Gesetz von der Konstanz der relativen Unterschiedsempfindlichkeit verstanden, also ohne Rücksicht auf die Verwertung, welche Webers Beobachtungen etwa bei Aufstellung eines „psychophysischen Gesetzes" im Sinne Fechners finden könnten. Unser Gesetz befafst ebenmerkliche Verschiedenheit so gut in sich, wie übermerkliche; die beiden Fälle sind auf ihre Bedeutung für die uns beschäftigende Thatsache besonders zu erwägen.

Zunächst ist im allgemeinen aufser jedem Zweifel, dafs das Gesetz vermöge der Empirie, auf die es sich gründet, auf die Unterschiedsempfindlichkeit im weiteren Wortsinne[2] be-

[1] Vergl. übrigens B. Kerry, „Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung". VI. Artikel. *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1889. S. 398 ff.

[2] Vergl. oben S. 55 f.

zogen werden mufs, indem der relative Unterschied, dem die Konstanz des Vergleichungsergebnisses gegenübersteht, ein Reizunterschied ist. Nun wird aber für das Gebiet, auf das die gegenwärtigen Erwägungen sich beschränken, dem, was oben Reizunterschiedsempfindlichkeit genannt wurde, eine charakteristische Bedeutung kaum beizumessen sein. Es liegt dies ohne Zweifel an dem Parallelismus, der, wie berührt,[1] hier zwischen dem Quasi-Reiz, der objektiven Ausdehnung und der Quasi-Empfindung, der subjektiven Ausdehnung (vom Falle der Zahl ganz zu geschweigen) besteht, — sollte derselbe auch damit zusammenhängen, dafs bei der Vorstellung der sog. objektiven Ausdehnung die Subjektivität eher eine besonders grofse als eine besonders kleine Rolle spielt. Eine Reizunterschiedsschwelle ist dadurch nun freilich nicht ausgeschlossen, und man hat Grund genug, überzeugt zu sein, dafs eine solche bei Raum- wie Zeitsinn allemal besteht. Aber gerade was wir z. B. von der Sehschärfe wissen, verbietet uns, sie für das Steigen der absoluten Schwellenwerte bei Zunahme der zu vergleichenden Strecken verantwortlich zu machen. Wir sind sonach berechtigt, das Gesetz innerhalb der hier gesteckten Grenzen auf die Inhaltsunterschiedsempfindlichkeit zu beziehen,[2] also, da die vorgestellten Gegenstände eben die direkt verglichenen psychischen Gröfsen sind, das diese Vergleichung betreffende Gesetz zur Beantwortung unserer Frage nach der Eignung der Differenz als Messungssurrogat zu verwerten. So bestimmt es nun Konstanz der relativen Unterschiedsempfindlichkeit behauptet, so bestimmt behauptet es Inkonstanz der absoluten: es ist ja der Gesetzmäfsigkeit wesentlich, dafs sehr verschiedene (absolute) Differenzen denselben Vergleichungseffekt mit sich führen, und höchstens darüber könnte nun noch Unsicherheit bestehen, ob die Gleichheit des Vergleichungseffektes auch Gleichheit der Verschiedenheit zu bedeuten hat. So wenig Gewicht mir diese Unsicherheit gemäfs früheren Ausführungen[3] zu haben scheint, soll sie auch hier nicht ganz unerwogen bleiben. Es empfiehlt sich dabei, die beiden Fälle

[1] Vergl. S. 85 f.

[2] Inwieweit hi[illegible]it zu Gunsten der sog. Verhältnishypothese Stellung genommen ist, k[illegible] erst in späterem Zusammenhange zur Sprache kommen, vergl. [illegible] § 32.

[3] Vergl. § [illegible]

des ebenmerklichen und übermerklichen Unterschiedes ausdrücklich auseinanderzuhalten.

I. Der erste Fall, der der Konstanz der relativen Unterschiedsschwelle, ist, wie für die ganze Psychophysik, so insbesondere auch für die Merklichkeitstheorie der Ausgangspunkt gewesen, indem der Annahme, bei wachsenden Vergleichsgröſsen kämen bei mitwachsenden Differenzen gleiche Verschiedenheiten zu stande, die Auffassung gegenübertrat, bei gröſseren Vergleichsgröſsen würde die Verschiedenheit erst „bemerkt", wenn auch sie entsprechend gröſser geworden sei. Gestützt wird diese Auffassung „durch alle die so höchst gewöhnlichen Erfahrungen, daſs es eine Menge von Umständen giebt, welche uns das Vergleichen, überhaupt das In-Relation-setzen bald erleichtern, bald erschweren; und es wäre gar nicht unnatürlich, anzunehmen, daſs es uns um so schwerer fällt (verhältnismäſsig mehr psychische Arbeit kostet), Vergleichungen anzustellen, je stärker das Organ, genauer: das empfindende Bewuſstsein schon in Anspruch genommen ist".[1] Aber so ansprechend dieser Gedanke ohne Zweifel sich darstellt, am Ende gilt auch ihm gegenüber die Bemerkung Fechners,[2] daſs man doch selbstverständlich werde voraussetzen müssen, die scheinbare Verschiedenheit hänge einerseits von der wirklichen Verschiedenheit, andererseits immerhin auch von Nebenumständen ab, zu denen aber die zu vergleichenden Gröſsen selbst nicht wohl gezählt werden können. Wenn ich von zwei Verschiedenheiten die gröſsere „merke", die kleinere nicht, so liegt doch immer am nächsten, dafür die betreffende Verschiedenheitsgröſse verantwortlich zu machen, und nicht eine erst nahezu ad hoc aufzustellende Hypothese. Zudem ist, wie bereits früher vorübergehend berührt,[3] eine evident erkannte Verschiedenheit als mit den Vergleichsgröſsen notwendig verbunden so „wirklich", als eine Verschiedenheit eben wirklich sein kann, und zwar auch ihrer Gröſse nach. Nähme also, wie die in Rede stehende Auffassung verlangt, die ebenmerkliche Verschiedenheit mit den Vergleichsgröſsen zu, so müſste zugleich das Überschreiten der Unterschiedsschwelle einen immer gröſser

---

[1] Höfler in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1887. S. 369; vergl. auch *Psychische Arbeit.* Bd. VIII der *Zeitschr. f. Psychol.* S. 98 (S. 55 des Sonderabdruckes).

[2] *In Sachen.* S. 46 ff. — [3] Vergl. oben S. 56 f.

werdenden Sprung bedeuten. Nun ist aber dergleichen bei unveränderter Unterschiedsempfindlichkeit, so viel mir bekannt, nirgends beobachtet worden; vielmehr ist es die Regel, daſs ebenmerkliche Verschiedenheiten als sehr kleine und eben der Kleinheit wegen eine weitere Verkleinerung nicht mehr gestattende Verschiedenheiten sich darstellen, wie immer die Vergleichsgröſsen beschaffen seien. Schlieſslich müſste direkte Vergleichung der ebenmerklichen Verschiedenheiten, die FECHNER selbst wenigstens vorgenommen hat,[1] doch irgend einmal auf Verschiedenheit geführt haben; Berufung auf die Schwelle bleibt freilich auch hier jederzeit statthaft, wird aber eben deshalb nur wenig für sich einnehmen. So möchte es doch das Natürlichste sein, die eben merklichen Verschiedenheiten als gleiche Verschiedenheiten gelten zu lassen; die Hoffnungen aber, die an die hier bekämpfte Auffassung in betreff einer Klärung der „Kernfrage des ganzen Psychophysikstreites“ geknüpft worden sind,[2] werden vielleicht weniger ins Gewicht fallen, falls die gegenwärtigen Untersuchungen, wenn auch auf anderem Wege, diesen Streit einer erwünschten Lösung näher bringen sollten.

II. Eine direkte Stütze findet das eben Dargelegte nun überdies an jenen Erfahrungen und Versuchen, welche die Konstanz der relativen Unterschiedsempfindlichkeit auch für übermerkliche Verschiedenheiten erwiesen haben. Daſs hier nicht ohne ganz augenfällige Gewaltsamkeit Gleichmerklichkeit an Stelle von Gleichheit zu setzen wäre, bedarf nach Früherem[3] keiner Begründung mehr. Nur sind den in Rede stehenden Bestätigungen neuerlich auch Versuchsergebnisse von entgegengesetzter Tendenz gegenübergetreten, Mittenschätzungen nämlich, bei denen nicht die relativen, sondern die absoluten Unterschiede konstant blieben, indem die Schätzung weit mehr zu Gunsten des arithmetischen als des geometrischen Mittels ausfiel. Ich muſs nun freilich aus äuſseren wie aus inneren Gründen darauf verzichten, hier eine ins einzelne gehende Stellungnahme zu den diesbezüglichen, ebenso umfassenden als sorgfältigen Untersuchungen J. MERKELS[4] zu versuchen. Aber soweit man

[1] *In Sachen*. S. [illegible]: auch [illegible] Bd. IV. S. 185.
[2] Vergl. HÖFLER, [illegible] S. [illegible] (S. 55 des Sonderabdruckes).
[3] Vergl. oben § [illegible]
[4] Vergl. d[illegible] Abhängigkeit zwischen Reiz und [illegible] IV., V u. X.

die Zurückhaltung in dieser Sache auch treiben mag, darüber scheint mir ein Zweifel nicht mehr aufkommen zu können, dafs MERKEL in höchst beachtenswerter Weise auf Thatsachen[1] aufmerksam gemacht hat, die allen Umdeutungsversuchen stand halten werden. Angesichts solcher Thatsachen, wie grofs oder klein ihr Umkreis auch sei, mufs hier die Frage aufgeworfen werden, ob ihnen gegenüber der im obigen eingenommene Standpunkt in betreff des Auseinandergehens von („absolutem") Unterschied und Verschiedenheit noch aufrecht erhalten werden kann.

Gesetzt vor allem, zur Beurteilung des Verhältnisses zwischen Unterschied und Verschiedenheit käme überhaupt nichts Anderes als die MERKELschen Erfahrungen über das arithmetische Mittel in Betracht, was dürfte aus diesen über das fragliche Verhältnis geschlossen werden? Jedenfalls nicht, — dies ausdrücklich zu bemerken, möchte vielleicht doch nicht ganz überflüssig sein, — Identität von Unterschied und Verschiedenheit. Das ergiebt sich einfach daraus, dafs Verschiedenheit ihrem Wesen nach mit Teilung und Teilbarkeit nichts zu thun hat, die Differenz aber, wie wir sahen, erst aus der Teilvergleichung hervorgeht. MERKEL selbst hat ja gleiche Verschiedenheiten (bei arithmetischem Mittel des Reizes) auch in Bezug auf „intensive", d. h., wie noch zu berühren, unteilbare psychische Gröfsen konstatiert. Soweit es sich aber, wie dies ja unsere gegenwärtige Aufgabe ist, nur um ein Messungssurrogat handelt, näher um ein Surrogat für die Messung von Verschiedenheiten teilbarer Gröfsen, könnte aus den MERKELschen Versuchen heraus gegen die Annahme: „wo gleiche Verschiedenheiten, da gleiche Unterschiede und umgekehrt" und auf Grund dessen gegen die Vermutung einer Proportionalität zwischen Unterschieds- und Verschiedenheitsgröfsen nichts Triftiges eingewendet werden.

Nun haben wir aber gesehen, dafs die Fälle des arithmetischen Mittels bei weitem nicht das Gesamtmaterial dessen

---

[1] Dafs Versuche im Grazer psychologischen Laboratorium gelegentlich zu ganz frappierenden Bestätigungen geführt haben, darf bei der Veranstaltungsweise der betreffenden Versuche kaum mehr als subjektive Bedeutung beanspruchen. Wertvoller sind vielleicht ein paar ebenda zusammengestellte erste Versuchsreihen auf einem bisher noch nicht betretenen Gebiete, dem der Richtungsverschiedenheit, über die S. WITASEK in Bd. XI. der *Zeitschr. f. Psychol.* berichtet.

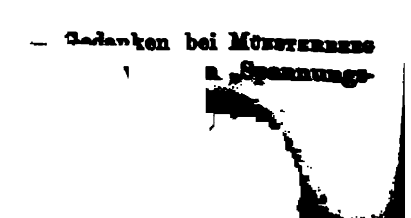
ausmachen, aus dem wir über den Ausfall von Vergleichungen positiven oder negativen Aufschlufs gewinnen können. MERKEL selbst redet von Versuchen, von denen er annimmt, „dafs sowohl mit der Vergröfserung der Distanz der Grenzreize, als auch, wenn es gilt, zwei sich immer mehr entfernende Distanzen zu beurteilen, statt der Beurteilung nach gleichen Unterschieden zum Teil die Beurteilung nach gleichen Verhältnissen mit zur Verwendung kommt".[1] Es kommen auf dem Gebiete des Übermerklichen die Vulgärerfahrungen über ungleiche Verschiedenheiten bei gleichen Unterschieden, aufserdem die oft als eigentlicher Kern des WEBERschen Gesetzes bevorzugten Thatsachen der konstanten relativen Unterschiedsschwelle hinzu. Sie alle sprechen in einer Weise deutlich gegen den Satz „Gleicher Unterschied, gleiche Verschiedenheit", dafs ich nicht absehe, wie er solchen Instanzen gegenüber zwanglos aufrecht erhalten werden könnte.

Man könnte nun freilich versuchen, diese Gegeninstanzen wegzuinterpretieren; aber soviel ich sehe, bietet sich hierzu nur bei den Schwellenthatsachen ein einigermafsen plausibler Gedanke. Ich habe indes am Ende des zweiten Abschnittes der gegenwärtigen Untersuchungen dargelegt, was mich hindert, zur Sache der Merklichkeit zu machen, was sich meiner Meinung nach nur als Sache der Vergleichung behandeln läfst. Natürlich wäre aber auch günstigsten Falles damit für die übermerklichen Verschiedenheiten noch nichts gewonnen, und ich kenne derzeit keinen Gesichtspunkt, der hier auch nur dem Merklichkeitsgedanken einigermafsen an die Seite gesetzt zu werden verdiente.

Wie das Zusammengehen von Unterschied und Verschiedenheit die in Rede stehenden Erfahrungen, so hat nun freilich die von mir vertretene Auffassung in ganz gleicher Weise die MERKELschen Versuche gegen sich. Aber ist es schon ein Vorteil, dafs diese Gruppe von Gegeninstanzen dann, soviel ich sehen kann, die einzige ist, so fällt noch mehr ins Gewicht, dafs bei dem berührten engen Zusammenhange [illegible] n Distanzen und Strecken sehr wohl denkbar ist, dafs [illegible] Umständen statt der ersteren die letzteren das Vergleich[illegible] s entscheiden.[2] Handelt es

[1] *Philos. Stud.* Bd [illegible]

[2] Vielleicht fi[illegible] — [illegible]danken bei MÜNSTERBERG (*Beiträge*. Heft 3. S [illegible] [illegible] n „Spannungs-



sich namentlich, was ja ohnehin der uns im gegenwärtigen Zusammenhange zunächst betreffende Fall ist, um die Mittenschätzung bei psychischen Strecken, und es kommt dabei aus irgend einem Grunde zu einem Verfahren, das der Superposition physischer Strecken einigermafsen analog ist, so ist dann sehr natürlich, dafs das zuletzt Verglichene der Unterschied der gröfsten von der mittelgrofsen, und der Unterschied der mittelgrofsen von der kleinsten Strecke ist. Handelt es sich, was übrigens aufser der gegenwärtigen Betrachtungssphäre liegt, um ähnliche Schätzungen bei Schallstärken, so geschieht es, wenn ich an mir gemachten Beobachtungen trauen darf, thatsächlich, dafs man beim Übergang von der einen Schallstärke zur anderen, wie sie dem Abgeben des Urteils voranzugehen, dem Wahrnehmen der Schalle aber nachzufolgen pflegt, statt Sprünge zu machen, den Weg zwischen den betreffenden Schallstärken wenigstens manchmal in der Einbildung ausfüllt; von hier aus könnte dann wieder ein Quasi-Superpositionsverfahren zu Differenzen statt Verschiedenheiten führen. Befriedigend kann ich dergleichen noch sehr unfertige Gedanken freilich nicht finden, zumal dann immer noch ganz offen gelassen ist, warum Einflüsse der oben bezeichneten Art nur zur Geltung kommen, wenn die zu vergleichenden Distanzen einander nahe, und nicht, wenn sie einander fern stehen. „Die gröfsere Verschiedenheit der Reize", meint MERKEL in Bezug auf den letzteren Fall, „bedingt eben, dafs neben einer direkten Vergleichung der Distanzen der zweite Reiz an dem verwandteren ersten, und der vierte Reiz an dem verwandteren dritten gemessen wird, und das führt notwendig zu einem Wettstreit zwischen der Beurteilung nach gleichen Unterschieden und gleichen Verhältnissen";[1] aber hier liegt zum allermindesten in dem doch wohl nicht im wörtlichen Sinne zu verstehenden „Messen" das Problem.[2] Kurz, ich verkenne weder, noch

empfindungen" absieht. Übrigens will damit anderweitigen Einflüssen, wie sekundären Kriterien in betreff der Reizschätzung, ihre Bedeutung keineswegs abgesprochen sein.

[1] *Philos. Stud.* Bd. X. S. 224.

[2] Falls ich nämlich die Gegenüberstellung einer Beurteilung „nach gleichen Unterschieden und gleichen Verhältnissen" meiner Auffassung zu nutze machen darf. Wichtig schiene mir vor allem, ob die Gegenüberstellung auch im engsten Sinne psychologisch verstanden, d. h. das Urteil über Unterschiede und Verhältnisse wenigstens mit ins Auge

wünsche ich zu verbergen, daſs hier der schwächste Punkt der von mir vertretenen Auffassung liegt. Sie scheint mir aber ihrem Wesen wie ihren in der Folge darzulegenden Konsequenzen nach fest genug begründet zu sein, um ihr sonst möglichen Aufstellungen gegenüber den Vorzug zu sichern.

§ 21. Unterschied und Verschiedenheit.

Überblicke ich die vorstehenden Untersuchungen, so scheinen sie mir mehr als ausreichend, die Überzeugung zu begründen, daſs die Differenz nicht die von uns gesuchte[1] Funktion ist, die uns zum zahlenmäſsigen Ausdrucke der Gröſsenverschiedenheit führt. Ich schlieſse hieran die Beantwortung einer allgemeineren Frage, welche bei streng methodischem Vorgehen vielleicht den Darlegungen der letzten Paragraphen hätte vorausgehen sollen. Sie ihnen erst folgen zu lassen, hat den Vorteil, daſs über die Weise ihrer Erledigung nun kein Zweifel mehr aufkommen kann und sie gleichwohl niemandem im Lichte einer doktrinären Überflüssigkeit erscheinen dürfte.

Sind Differenz und Verschiedenheit, so lautet die Frage, nicht im Grunde eines und dasselbe? Daſs die Antwort negativ ausfallen muſs, liegt nach Obigem auf der Hand; kann die Differenz nicht einmal ein Messungssurrogat für Verschiedenheit abgeben, so kann sie noch weniger mit dieser identisch sein. Es ist nun aber, namentlich mit Rücksicht auf die Merkelschen Beobachtungen, von Wert, festzuhalten, daſs diese Nicht-Identität nicht etwa n u r aus der Unverwendbar-

---

gefaſst ist. Wenn ja, dann liegt wohl sehr nahe, noch einen Schritt weiter zu gehen: Verhältnisse („geometrische“ nämlich), wenn man damit die mathematische Relation dieses Namens meint, ergeben sich doch nicht aus Vergleichungen als deren unmittelbares Resultat; worüber könnte in solchen Fällen also geurteilt werden, wenn nicht über Verschiedenheit? Übrigens hat J. Merkel selbst eine nähere Untersuchung der psychologischen Seite der Sache versprochen („Die Aufgaben und Methoden der Psychologie in der Gegenwart“. *Wiss. Beil. z. Jahresber. d. kgl. Realgymnasiums in Zittau.* 1895. S. 24) und die Wichtigkeit der Angelegenheit läſst baldige Erfüllung dieser Zusage hoffen. — Auf das Unzureichende der von Wundt speziell mit Bezug auf die „Methode der mittleren Abstufungen“ versuchten Erklärung weist W. Dittenberger hin („Über das psychophysische Gesetz“ im *Arch. f. system. Philos.* Bd. II. S. 101).

[1] V [illegible] e.

keit als Messungssurrogat erhellt. Die Frage kann ja auch direkt an die psychologische Empirie gerichtet werden, etwa in der Form: wenn ich vergleiche, genauer, wenn ich auf Grund einer Vergleichung Verschiedenheit affirmiere oder negiere, urteile ich da über Differenz? Und aus dieser direkten Empirie heraus, ohne Vor- oder Nachgedanken, mufs ich darauf mit entschiedenem „Nein" antworten. Dieses Nein läfst sich dann aber noch durch eine nachträgliche Erwägung erhärten. Gröfsen sind, wie wir wissen, nicht das einzige, dem Verschiedenheit zukommen kann; Differenzen oder Unterschiede aber können überhaupt nur zwischen Gröfsen vorkommen und auch zwischen ihnen nicht, wenn sie nicht teilbar sind. Es tritt dies auch in der bereits oben[1] erwähnten Thatsache hervor, dafs der Unterschiedsgedanke vermöge seiner Provenienz aus der Teilvergleichung auf den um vieles weiter anwendbaren Verschiedenheitsgedanken aufgebaut ist. Auch hier tritt die von Manchen so gern umgangene und doch nie ohne Schaden zu umgehende Betrachtung des vor den theoretischen Zuthaten psychologisch Vorliegenden in ihre Rechte. Fragt man sich, was man mit dem Worte „Differenz" und was man mit dem Worte „Verschiedenheit" für einen Sinn verknüpft, was man bei dem einen und dem anderen Worte thatsächlich denkt, so lautet die Antwort wieder mit aller Bestimmtheit, dafs es dort ein Anderes ist, als hier.

Eine Unsicherheit kann hierüber, soviel ich sehe, nur insoweit aufkommen, als der Wortgebrauch ein unsicherer ist. Solche Unsicherheit liegt nun ohne Zweifel bis zu gewissem Grade vor, nicht, soweit es sich um die Worte „Verschiedenheit" und „Differenz", wohl aber, soweit es sich um das Wort „Unterschied" handelt. Es wurde oben der gebräuchlichen Wendungen gedacht, die „Unterschied" für „Verschiedenheit" zu setzen keinen Anstand nehmen, — aufserdem aber des mathematisch-technischen Gebrauches des Wortes „Unterschied" für „Differenz". Dieser Sachlage gegenüber empfiehlt sich eine terminologische Feststellung, die uns in der Folge noch gute Dienste leisten wird.

Es ist ja selbstverständlich, dafs man Grund haben wird, den mathematischen und aufsermathematischen Wortgebrauch

---

[1] Vergl. S. 91.

in Bezug auf den Terminus „Unterschied“ wohl auseinanderzuhalten; weil solches Auseinanderhalten aber Unzukömmlichkeiten doch nicht auszuschließen vermöchte, so greift man noch besser zu dem radikaleren Auskunftsmittel, die eine der beiden Anwendungsweisen ganz zu vermeiden. Überdies hat man auch sonst kein Interesse daran, das, was durch das Wort „Verschiedenheit“ in natürlicher Weise ausgedrückt ist, auch noch durch ein anderes deutsches Wort auszudrücken, das es in der Mathematik bereits zu einem ebenso fest bestimmten als wichtigen Sinn gebracht hat. Dabei haben wir es hier nicht mit einer Bedeutung zu thun, welche die Mathematik dem Worte „Unterschied“ im Gegensatze zum Sprachgefühl erst aufgezwungen hätte: die Wendung „die beiden Wegstrecken unterscheiden sich um ein beträchtliches Stück“ hat nichts wissenschaftlich Technisches an sich, beweist vielmehr, daſs das Wort „Unterscheiden“ bereits in seiner auſserwissenschaftlichen Anwendung den Bedürfnissen der Teilvergleichung in besonderer Weise Rechnung trägt.

Unter solchen Umständen drängt sich wohl von selbst die Konsequenz auf, daſs es ratsam sein werde, sich des Wortes „Unterschied“ nur in Einem Sinne, und zwar in demjenigen zu bedienen, in dem wissenschaftlicher und auſserwissenschaftlicher Sprachgebrauch zusammentreffen, d. h., mehr kurz als genau gesagt, im Sinne der Mathematik. In diesem Sinne ist etwa der Unterschied zwischen zwei Linien wieder eine Linie, indes die Verschiedenheit zwischen zwei Linien so gut wie sonst irgend eine Verschiedenheit eine Relation und nichts weniger als eine Strecke ist;[1] es kann nur zu Verwirrungen führen und hat thatsächlich, wie wir sehen werden, zu solchen geführt, wenn auch diese Relation mit dem Namen „Unterschied“ belegt wird.[2] Es wird sich also empfehlen, eine solche, völlig

[1] Vergl auch EHRENFELS in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1892. S. 301 f. Anm.

[2] Es scheint mir übrigens mindestens sehr zweifelhaft, ob man dabei auch nur die oben herangezogenen Fälle anscheinend gleicher Anwendung von „Unterschied“ und „Verschiedenheit“ genau genommen gegen sich hat. Sehr auffallend ist zum mindesten, daſs, wo man einen „Unterschied“ statuiert, die Frage, worin er besteht, was ihn ausmacht, stets guten Sinn hat. Und worauf hat es Derjenige abgesehen, der eine solche Frage stellt? Er wünscht, wenn es sich etwa um die Objekte A und B handelt,

Heterogenes konfundierende Ausdrucksweise dort, wo es einigermaſsen auf Genauigkeit ankommt, möglichst zu vermeiden.[1]

Ungünstig für solchen Vorsatz ist freilich die Thatsache, daſs Ausdrücke wie „Unterschiedsschwelle“, „Unterschiedsempfindlichkeit“, bei denen es sich zweifellos nicht um Unterschied im eben angegebenen Sinne, sondern um Verschiedenheit handelt, dem psychologischen Sprachgebrauche so geläufig geworden sind, daſs niemand auf dieselben wird verzichten wollen. Inzwischen sind von diesen Zusammensetzungen erhebliche Miſsvertändnisse heute schwerlich mehr zu besorgen, wenigstens nicht ernstlicher als von dem Bestandteil „Empfindlichkeit“ des zweiten der eben angeführten Ausdrücke, bei dessen Anwendung[2] man doch auch schon recht selten verkennen wird, wie wenig „Unterschied“ oder eigentlich „Verschiedenheit“ Sache des Empfindens sein könne. Es hat noch niemals eine völlig konsequente Terminologie gegeben, so wenig in wie auſser der Wissenschaft; man kann also getrost der Unterschiedsschwelle und der Unterschiedsempfindlichkeit den gebräuchlichen Namen belassen und sich übrigens doch nach Kräften hüten, den Unterschied mit der Verschiedenheit zu verwechseln.

§ 22. Das geometrische Verhältnis.

Es ist der Natur unserer Untersuchungen gemäſs, nachdem so das „arithmetische“ Verhältnis sich als zur Lösung der am Anfange von § 18 gestellten Aufgabe unzureichend erwiesen hat, nunmehr das „geometrische“ Verhältnis in Erwägung zu ziehen. Es handelt sich jetzt also darum, ob eine Gleichsetzung von der Form

---

zu wissen, was für Eigenschaften A vor dem B, eventuell auch B vor dem A voraushat. Der „Unterschied“ ist also im Grunde auch hier keine Relation, sondern eine Komplexion, was von der Verschiedenheit in keinem noch so ungenauen Wortsinne zutrifft. Ist dem so, dann fehlt eigentlich der Identifikation von Verschiedenheit und Unterschied jede sprachgebräuchliche Stütze.

[1] Vielleicht ist dem Leser früherer Ausführungen, namentlich deren gegen die Merklichkeitstheorie, bereits aufgefallen, daſs dabei das Wort „Verschiedenheit“ an Stellen gebraucht wurde, wo man sonst an das Wort „Unterschied“ gewöhnt war. Hoffentlich findet dies im eben Gesagten seine nachträgliche Rechtfertigung.

[2] Vergl. oben S. 57. Anm. 2.

$${}_aV_b = C\frac{a}{b} \text{ oder eventuell } {}_aV_b = C\frac{b}{a}$$

den Thatsachen entspricht.

Vor allem interessiert uns hier natürlich die Frage, ob durch eine solche Funktion die Mängel der zuerst versuchten Aufstellung behoben sind. Es ist nun nicht zu leugnen, dafs eine hierauf gerichtete nähere Erwägung der abgeänderten Sachlage in der That zu einigen befriedigenden Ergebnissen führt.

Fragen wir zunächst, ob der Gleichheit des Quotienten nun auch wirklich jene Gleichheit der Verschiedenheitsgröfse entspreche, die wir bei gleicher Differenz vergebens gesucht haben, so drängt sofort ein zwar etwas komplizierterer, gleichwohl aufserordentlich populärer Relationsgedanke zur Bejahung, der Gedanke der (geometrischen) Proportionalität. Die Mathematik definiert sie als Gleichheit der Quotienten und mag ihre guten Gründe haben, bei dieser Bestimmung stehen zu bleiben. Der übliche Ausdruck der Proportionalität durch Wendungen wie: „n verhält sich zu o, wie sich p zu q verhält“ behauptet die Gleichheit zweier Relationen, ohne die Natur dieser Relationen näher anzugeben; und im Werte des Quotienten, den zwei Zahlen ergeben, tritt ja sicherlich eine Relation dieser Gröfsen, in der Übereinstimmung zweier Quotienten also eine Übereinstimmung in betreff dieser Relation hervor. Wenn aber einer sagt: „je länger der in der gegebenen Zeit zurückgelegte Weg war, desto gröfser mufste die Geschwindigkeit gewesen sein“, oder „je gröfser die Mühe, desto höher der Preis“ und dergl., da hat er sicherlich keine Quotienten im Auge, sondern Steigerungen, die trotz der Verschiedenheit des Gesteigerten als gleich grofse Steigerungen angesehen werden. Woher nähme auch der Proportionalitätsgedanke seine Volkstümlichkeit, wenn er nichts anderes als eine mathematische Operation zur Grundlage hätte? Und wenn dies einmal ausgeschlossen ist, worauf könnte er natürlicher bezogen werden als auf die Verschiedenheit, genauer: auf die Gleichheit von Verschiedenheiten?

Exakter ist natürlich der Nachweis, der in jener Formulierung des Weberschen Gesetzes vorliegt, die mit Recht als die einwurfsfreieste bezeichnet worden ist. Dieselbe behauptet ja Konstanz der relativen Unterschiedsempfindlichkeit;

nun ist der sogenannte relative Unterschied zwar nicht selbst der Quotient, aber gleiche relative Unterschiede gehen bekanntlich mit gleichen Quotienten zusammen. Was also an ebenmerklichen und übermerklichen Verschiedenheiten diesem Gesetze gemäfs ist, verifiziert zugleich die Annahme des Zusammengehens gleicher Quotienten mit gleichen Verschiedenheiten; gleiche Verschiedenheiten bei ungleichen Quotienten sind hierdurch nicht minder ausgeschlossen, als ungleiche Verschiedenheiten bei gleichen Quotienten.

Indem wir so von der beiderseitigen Koincidenz der Gleichheiten auf die der Ungleichheiten übergehen, gelangen wir zugleich zu der noch ausstehenden Entscheidung zwischen den beiden oben nebeneinandergestellten Quotienten von a und b. Gilt der schon oben einmal herangezogene Grundsatz: die Verschiedenheit ist um so gröfser, je gröfser das gröfsere, je kleiner das kleinere der distanten Objekte ist, so ist sofort ersichtlich, dafs nur b als das Gröfsere in den Zähler, nur a als das Kleinere in den Nenner des präsumtiven Bruches gesetzt werden kann. Nur die Annahme:

$$ {}_aV_b = C\frac{b}{a} $$

braucht also unsere weiteren Erwägungen zu beschäftigen.

Es handelt sich nun nur noch um die Grenzfälle, und auch hier tritt die Überlegenheit des Quotienten gegenüber der Differenz zu Tage, insofern nicht nur die Verschiedenheit des Endlichen vom Unendlichen, sondern auch die des Endlichen von der Null einen unendlich grofsen Wert für den in Aussicht genommenen Bruch ergiebt. Dagegen führt der noch übrige Grenzfall der Gleichheit von a und b, dem die Differenzformel mit Leichtigkeit Rechnung tragen konnte, bei der Quotientenformel zu einem ganz unannehmbaren Resultate. Für

$$ a = b \text{ ist } {}_aV_b = C, $$

indes natürlich die Verschiedenheit zwischen zwei gleichen Gröfsen keinen anderen als Nullwert haben kann.

Die Unfähigkeit auch des geometrischen Verhältnisses, das gewünschte Surrogat zur Verschiedenheitsmessung zu liefern, tritt hiermit klar zu Tage. Das, worauf uns die Untersuchung geführt hat, ist nicht etwa ein vereinzelt auftretender Wider-

spruch, über den sich freilich auch schwerlich hinwegsehen ließe; vielmehr verrät sich darin ein fundamentaler Mangel des in Betracht gezogenen Größensystems. Ist dieses so beschaffen, daß es unter den oben dargethanen und durchaus unerläßlichen Voraussetzungen über die Stellung des a und b im Bruche günstigsten Falles nur ein Limitieren gegen 1 gestattet, so kann es unmöglich als Messungssurrogat für ein System eintreten, dessen Fähigkeit, gegen Null zu limitieren, außer jedem Zweifel ist.

§ 23. Der relative Unterschied.

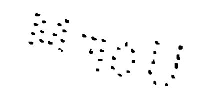
Es ist nicht eben schwer, eine Funktion zu finden, welche unsere Maßzahlen a und b derart miteinander verbindet, daß im Resultate die Vorzüge sowohl der Differenz als des Quotienten erhalten bleiben, die oben namhaft gemachten Mängel sonach beseitigt sind. Man findet diese Funktion in dem der Psychologie heute so geläufigen Begriffe des „relativen Unterschiedes", der, wenn wir von einer etwaigen Verschiedenheit des Vorzeichens auch hier ihrer augenscheinlichen Unwesentlichkeit halber absehen, uns doch jedenfslls die zwei Eventualitäten zur Wahl bietet:

$$_aV_b = C\,\frac{b-a}{a} \quad \text{und} \quad _aV_b = C\,\frac{b-a}{b}.$$

Ehe wir nach Gesichtspunkten für eine solche Wahl suchen, empfiehlt es sich, ausdrücklich zu konstatieren, was durch Einführung dieser Funktion für unsere Zwecke gewonnen ist. Dreierlei darf, wie ohne weiteres ersichtlich, im Hinblick auf die bei Differenz und Quotient geführten Untersuchungen der in der neuen Weise gewonnenen Maßzahl nachgesagt werden:

1. Gleichen Verschiedenheiten entsprechen gleiche, ungleichen Verschiedenheiten ungleiche, und zwar im nämlichen Sinne ungleiche Werte dieser Maßzahl. Die Gewähr dafür liegt in dem schon oben berührten Umstande, daß zu gleichen relativen Unterschieden allemal gleiche Quotienten gehören, für letztere aber, wie wir sahen, der in Rede stehende Parallelismus mit den zugehörigen Verschiedenheiten zu Recht besteht.

2. Der Gleichheit von a und b entspricht stets der Zahlenwert 0.



3. Erreicht *a* den ihm voraussetzungsgemäſs allein zugänglichen Grenzwert 0, oder *b* den ihm aus gleichem Grunde allein zugänglichen Grenzwert ∞, so ergiebt dies für die beiden oben nebeneinandergestellten Gestalten des relativen Unterschiedes, bezw.:

$${}_aV_b = \infty \quad \text{oder} \quad {}_aV_b = C.$$

Daſs die Resultate 1 und 2 für die Brauchbarkeit der in Rede stehenden Funktion entschieden günstig sind, bedarf keiner weiteren Darlegung. Auch Resultat 3 empfiehlt sich, soweit es die erste Form des relativen Unterschiedes angeht, von selbst: die Verschiedenheit zwischen Null und einer endlichen, oder die zwischen einer endlichen und einer unendlichen Gröſse unendlich groſs anzusetzen, hat sich uns oben wiederholt als völlig natürlich herausgestellt. Bedenklicher ist die für diese Fälle aus der zweiten Gestalt des relativen Unterschiedes hervorgehende endliche Zahl *C*, also etwa wieder die Einheit; und die Konsequenz, daſs etwa 1 und 2 nur eine halb so groſse Verschiedenheit aufzuweisen hätten, als 1 und ∞, klingt mindestens recht gezwungen. Doch wäre dem keineswegs so viel Gewicht beizumessen, wie dem sonst in gewissem Sinne nicht unähnlich scheinenden Rechnungsergebnisse *C* oder 1 beim geometrischen Verhältnisse zwischen gleichem *a* und *b*. Es ist doch ein ganz Anderes, einer groſsen Verschiedenheit einen bloſs endlichen Maximalwert, als einer gänzlich mangelnden Verschiedenheit einen immer noch endlichen Minimalwert beizumessen. Daſs alle Verschiedenheit gegen ein endliches und unüberschreitbares Maximum limitiere, ist eine mindestens diskutierbare Annahme; daſs eine voraussetzungsgemäſs bereits verschwundene Verschiedenheit immer noch einen endlichen Wert habe, ist einfach widersprechend.

Es hat also doch alles in allem den Anschein, als hätten wir im relativen Unterschiede das gefunden, was wir suchen; die Bevorzugung, die diesem Begriffe in der modernen Psychologie allenthalben zu teil wird, wäre damit in befriedigendster Weise begründet. Nun obliegt uns aber doch zum mindesten noch, zwischen den zwei bisher parallel behandelten Gestalten des relativen Unterschiedes eine definitive Wahl zu treffen; eine solche müſste dann wohl auch anderen Aufgaben der Psychologie zu statten kommen, denen gegenüber es doch beim

Hin- und Herschwanken zwischen den beiden Formen oder einer willkürlichen Bevorzugung der einen derselben auf die Länge nicht wohl sein Bewenden haben könnte.

§ 24. Die beiden Gestalten des relativen Unterschiedes.

Es ist hierzu erforderlich, aufser den bisher allein berücksichtigten Gröfsen G_a und G_b noch eine dritte Gröfse G_c desselben Gebietes heranzuziehen. Es geschehe dies unter der Voraussetzung, dafs die für diese charakteristische Mafszahl c gröfser als b, daher um so mehr auch gröfser als a sei. Zu dem bisher allein erwogenen Verschiedenheitsfalle ${}_aV_b$ kommen jetzt noch die weiteren Fälle ${}_bV_c$ und ${}_aV_c$, deren Gröfse im Sinne der in Rede stehenden Annahme durch den relativen Unterschied der betreffenden Mafszahlen bestimmt ist. Sehen wir im Folgenden der Einfachheit halber von der Konstanten C ab, indem wir ihr den Einheitswert erteilen, eine Annahme, die im Bedarfsfalle ja jederzeit auch wieder aufgegeben werden könnte, so erhalten wir unter Zugrundelegung der ersten Gestalt des relativen Unterschiedes:

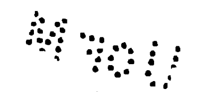
$$\text{analog zu } {}_aV_b = \frac{b-a}{a} \text{ nun noch: } {}_bV_c = \frac{c-b}{b},\quad {}_aV_c = \frac{c-a}{a},$$

unter Zugrundelegung der zweiten Gestalt

$$\text{analog zu } {}_aV_b = \frac{b-a}{b} \text{ nun noch: } {}_bV_c = \frac{c-b}{c},\quad {}_aV_c = \frac{c-a}{c}.$$

Der Zweck, dem die Einführung der Gröfse G_c dient, ist leicht zu erkennen. Hat man drei Gröfsen in geordneter, also etwa aufsteigender Reihe vor sich, so scheint es eine ganz selbstverständliche Annahme, dafs die drei mit ihnen gegebenen Verschiedenheiten ihrer Gröfse nach nicht voneinander unabhängig sein können, vielmehr die Verschiedenheit der ersten von der zweiten Gröfse, vermehrt um die Verschiedenheit der zweiten von der dritten, die Verschiedenheit der ersten von der dritten ergeben mufs. Können wir nun die Gröfsen dieser drei Verschiedenheiten auch als Funktionen der drei Mafszahlen a, b und c ausdrücken, so liegt die Frage nahe, ob die so gewonnenen Werte auch die Relation

$${}_aV_c = {}_aV_b + {}_bV_c$$



mit sich führen oder wenigstens zulassen, — zugleich die Erwartung, daſs das Ergebnis einer diesbezüglichen Feststellung auf die Eignung unserer Funktion und ihrer beiden Gestalten ein Licht zu werfen im stande sein werde.

Die Untersuchung muſs für jede der beiden Gestalten des relativen Unterschiedes besonders geführt werden. Ihr nächstes Objekt ist die Berechtigung des in der eben formulierten Gleichung auftretenden Gleichheitszeichens unter Voraussetzung der einen oder der anderen der beiden als relativer Unterschied bezeichneten Funktionen. Die Korrektheit desselben soll jedesmal zunächst hypothetisch angenommen und so weit in ihren Konsequenzen verfolgt werden, bis diese selbst die erforderlichen Aufschlüsse über die Beschaffenheit der Voraussetzung gewähren. Um allen Miſsverständnissen aus dem Wege zu gehen, soll das bloſs hypothetisch verstandene, in Wahrheit eben zu prüfende Gleichheitszeichen allemal durch ein darüber gesetztes Fragezeichen kenntlich gemacht werden.

Beginnen wir mit der ersten Gestalt des relativen Unterschiedes. Ihr gemäſs ist anzusetzen:

$$\frac{c-a}{a} \overset{?}{=} \frac{b-a}{a} + \frac{c-b}{b}$$

oder:

$$\frac{bc-ab}{ab} \overset{?}{=} \frac{b^2-ab+ac-ab}{ab}.$$

Die Entscheidung über Gleichheit oder Ungleichheit liegt hier offenbar im Zähler, näher in der Gegenüberstellung:

$$bc \overset{?}{=} b^2 + a(c-b)$$

oder:

$$b(c-b) \overset{?}{=} a(c-b).$$

Weil aber der Voraussetzung nach $b > a$ und $c > b$ ist, so ist nun nicht nur unverkennbar, daſs das Gleichheitszeichen hier überall unstatthaft, sondern auch, daſs es überall durch ein Gröſserzeichen zu ersetzen ist, was zum Ergebnis führt:

$$\frac{c-a}{a} > \frac{b-a}{a} + \frac{c-b}{b}.$$

Um den Sachverhalt an einem speziellen Beispiele zu beleuchten, nehme man etwa 1, 2 und 4 als die in Betracht kommenden Maſszahlen an. Dann hat die Verschiedenheit von 1 und 2 im Sinne unserer Funktion den Betrag 1, ebenso die Verschiedenheit von 2 und 4; die Verschiedenheit von 1 und 4 dagegen beträgt 3, indes die Summe der beiden kleineren Verschiedenheiten sich bloſs auf 1 + 1, also auf 2 beläuft.

Wenden wir uns zur zweiten Gestalt des relativen Unterschiedes. Dieselbe ergiebt:

$$\frac{c-a}{c} \overset{?}{=} \frac{b-a}{b} + \frac{c-b}{c}$$

oder:

$$\frac{bc-ab}{bc} \overset{?}{=} \frac{bc-ac+bc-b^2}{bc}.$$

Auch hier liegt die Entscheidung im Zähler, und zwar in dem was beiderseits von dem Produkte bc abgezogen wird. Also

$$ab \overset{?}{=} ac + b^2 - bc,$$

oder:

$$a(b-c) \overset{?}{=} b(b-c).$$

Auch hier widerspricht also das Gleichheitszeichen der vorausgesetzten Gröſsenrelation zwischen b und c. Um nun aber auch über den Sinn der sonach jedenfalls vorliegenden Ungleichheit ins Klare zu kommen, ist zu beachten, daſs die zu beiden Seiten des beseitigten Gleichheitszeichens übereinstimmend auftretende Differenz vermöge der Voraussetzung über die Gröſsenrelation zwischen b und c hier ebenso gewiſs negativen wie im erstuntersuchten Falle positiven Wert hat. Mit Rücksicht hierauf ist zu setzen:

$$a(b-c) > b(b-c).$$

Da aber hiermit nur zwei Subtrahenden verglichen sind, die von Haus aus einem und demselben Minuenden gegenüberstehen, so muſs die Ausgangsungleichung in Wahrheit wieder das entgegengesetzte Ungleichheitszeichen aufweisen so daſs wir erhalten:

[illegible]

Auch dies ist am obigen Spezialfall deutlich zu machen. Nach der zweiten Form des relativen Unterschiedes hat die Verschiedenheit zwischen 1 und 2 den Wert $\frac{1}{2}$, ebenso die zwischen 2 und 4, die zwischen 1 und 4 aber den Wert $\frac{3}{4}$, während die Summe 1 betrüge.

Übrigens gestatten die beiden Ergebnisse auch eine direkte, zugleich elegantere Ableitung, deren Kenntnis ich meinem verehrten Kollegen, Professor von Dantscher, verdanke. Für die erste Gestalt des relativen Unterschiedes folgt aus der Voraussetzung:

$$o < a < b < c$$

unmittelbar:

$$b\,(c-b) > a\,(c-b),$$

oder, wenn auf beiden Seiten der Ungleichung durch ab dividiert wird:

$$\frac{c}{a} - \frac{b}{a} > \frac{c}{b} - 1.$$

Wird nun beiderseits eine Einheit abgezogen, so erhält man:

$$-1 + \frac{c}{a} > -1 + \frac{b}{a} - 1 + \frac{c}{b}$$

oder:

$$\frac{c-a}{a} > \frac{b-a}{a} + \frac{c-b}{b}.$$

In gleicher Weise folgt für die zweite Gestalt des relativen Unterschiedes aus der eben namhaft gemachten Ausgangsvoraussetzung:

$$b\,(b-a) < c\,(b-a),$$

oder, wenn man innerhalb der Parenthese links vom Ungleichheitszeichen c addiert und wieder subtrahiert:

$$b\,[c-a-(c-b)] < c\,(b-a)$$

oder:

$$b\,(c-a) < c\,(b-a) + b\,(c-b).$$

Wird hier beiderseits durch bc dividiert, so ergiebt dies:

$$\frac{c-a}{c} < \frac{b-a}{b} + \frac{c-b}{c}.$$

Um den Sachverhalt an einem speziellen Beispiele zu beleuchten, nehme man etwa 1, 2 und 4 als die in Betracht kommenden Maſszahlen an. Dann hat die Verschiedenheit von 1 und 2 im Sinne unserer Funktion den Betrag 1, ebenso die Verschiedenheit von 2 und 4; die Verschiedenheit von 1 und 4 dagegen beträgt 3, indes die Summe der beiden kleineren Verschiedenheiten sich bloſs auf 1 + 1, also auf 2 beläuft.

Wenden wir uns zur zweiten Gestalt des relativen Unterschiedes. Dieselbe ergiebt:

$$\frac{c-a}{c} \overset{?}{=} \frac{b-a}{b} + \frac{c-b}{c}$$

oder:

$$\frac{bc-ab}{bc} \overset{?}{=} \frac{bc-ac+bc-b^2}{bc}.$$

Auch hier liegt die Entscheidung im Zähler, und zwar in dem was beiderseits von dem Produkte bc abgezogen wird. Also

$$ab \overset{?}{=} ac + b^2 - bc,$$

oder:

$$a(b-c) \overset{?}{=} b(b-c).$$

Auch hier widerspricht also das Gleichheitszeichen der vorausgesetzten Gröſsenrelation zwischen b und c. Um nun aber auch über den Sinn der sonach jedenfalls vorliegenden Ungleichheit ins Klare zu kommen, ist zu beachten, daſs die zu beiden Seiten des beseitigten Gleichheitszeichens übereinstimmend auftretende Differenz vermöge der Voraussetzung über die Gröſsenrelation zwischen b und c hier ebenso gewiſs negativen wie im erstuntersuchten Falle positiven Wert hat. Mit Rücksicht hierauf ist zu setzen:

$$a(b-c) > b(b-c).$$

Da aber hiermit nur zwei Subtrahenden verglichen sind, die von Haus aus einem und demselben Minuenden gegenüberstehen, so muſs die Ausgangsungleichung in Wahrheit wieder das entgegengesetzte Ungleichheitszeichen aufweisen, so daſs wir erhalten:

$$\frac{c-a}{c} < \frac{b-a}{b} + \frac{c-b}{c}.$$

Auch dies ist am obigen Spezialfall deutlich zu machen. Nach der zweiten Form des relativen Unterschiedes hat die Verschiedenheit zwischen 1 und 2 den Wert $\frac{1}{2}$, ebenso die zwischen 2 und 4, die zwischen 1 und 4 aber den Wert $\frac{3}{4}$, während die Summe 1 betrüge.

Übrigens gestatten die beiden Ergebnisse auch eine direkte, zugleich elegantere Ableitung, deren Kenntnis ich meinem verehrten Kollegen, Professor VON DANTSCHER, verdanke. Für die erste Gestalt des relativen Unterschiedes folgt aus der Voraussetzung:

$$o < a < b < c$$

unmittelbar:

$$b\,(c - b) > a\,(c - b),$$

oder, wenn auf beiden Seiten der Ungleichung durch ab dividiert wird:

$$\frac{c}{a} - \frac{b}{a} > \frac{c}{b} - 1.$$

Wird nun beiderseits eine Einheit abgezogen, so erhält man:

$$-1 + \frac{c}{a} > -1 + \frac{b}{a} - 1 + \frac{c}{b}$$

oder:

$$\frac{c - a}{a} > \frac{b - a}{a} + \frac{c - b}{b}.$$

In gleicher Weise folgt für die zweite Gestalt des relativen Unterschiedes aus der eben namhaft gemachten Ausgangsvoraussetzung:

$$b\,(b - a) < c\,(b - a),$$

oder, wenn man innerhalb der Parenthese links vom Ungleichheitszeichen c addiert und wieder subtrahiert:

$$b\,[c - a - (c - b)] < c\,(b - a)$$

oder:

$$b\,(c - a) < c\,(b - a) + b\,(c - b).$$

Wird hier beiderseits durch bc dividiert, so ergiebt dies:

$$\frac{c - a}{c} < \frac{b - a}{b} + \frac{c - b}{c}.$$

Man ersieht aus diesen Darlegungen vor allem, daſs die Voraussetzung, die man kurz als die der Summierbarkeit der Distanzgröſsen bezeichnen könnte, durch keine der beiden Gestalten des relativen Unterschiedes verifiziert wird, vielmehr die erste Gestalt die Gesamtdistanz gröſser, die zweite Gestalt kleiner ergiebt als die Teildistanzen, wenn diese ungenaue Bezeichnungsweise der Kürze halber gestattet ist. Es fragt sich dem gegenüber einmal, ob, was eben als Nicht-Summierbarkeit bezeichnet wurde, etwa schon ausreicht, um den relativen Unterschied in der hier versuchten Anwendung ganz im allgemeinen ad absurdum zu führen, — ferner eventuell, ob im besonderen das Gröſser oder Kleiner, das den beiden Gestalten des relativen Unterschiedes entspricht, eine Entscheidung zu Gunsten einer dieser Gestalten gewinnen hilft.

In betreff des ersteren Fragepunktes wird man sich darauf, daſs von Summierung bei Distanzen überhaupt streng genommen gar nie die Rede sein könne, nach Früherem nicht mehr berufen wollen. Distanzen sind nicht leichter, aber auch nicht schwerer zu addieren, als sie zu substrahieren, und somit auch, als sie zu messen sind. Kann man also Distanzen surrogativ messen, so wird man sie auch, wenn man so sagen darf, surrogativ addieren können. Sind x, y, z drei kontinuierlich miteinander verbundene oder verbindbare Objekte, im Falle, daſs es sich um Gröſsen handelt, etwa auch deren Maſszahlen, so ist die Frage, ob

$${}_xV_z = {}_xV_y + {}_yV_z$$

ist, jederzeit statthaft, wenn man dabei die zugeordneten Strecken im Auge behält, so daſs es zunächst darauf ankommt, ob auch

$$\overline{xz} = \overline{xy} + \overline{yz}$$

ist, wo der über je zwei Symbole gesetzte Querstrich eben die der betreffenden Distanz zugeordnete Strecke bedeutet.

Daſs nun aber weiter die negative Beantwortung einer solchen Frage keineswegs schlechthin eine Unverträglichkeit in den Annahmen verrät, wie Fechner wohl gemeint haben wird,[1] davon überzeugt man sich leicht, wenn man sich etwa

[1] „Über die psychischen Maſsprinzipien und das Weberſche Gesetz" in *Wundts Philos. Stud.* Bd. IV. S. 183 f. Seine Berufung auf die Nominal-

x, y und z als Punkte im Raume vorstellt. Nur wenn alle drei Punkte in derselben Geraden liegen, besteht das eben formulierte Summengesetz zu Recht. Liegen sie dagegen nicht in derselben Geraden, dann gilt das Summengesetz nicht,[1] und dann hat es auch einen ganz guten Sinn, das analoge Gesetz in betreff der zugeordneten Distanzen in Abrede zu stellen.

Einen Grund, den relativen Unterschied hier a priori abzulehnen, haben wir also nicht vor uns; dagegen führt uns das Raumgleichnis, wenn wir auf dasselbe einigermaſsen vertrauen dürfen, sofort zu der gesuchten Entscheidung zwischen den beiden Gestalten unserer Funktion. Wir können unsere drei Punkte im Raume, genauer in einer Ebene so anordnen, daſs die Summe zweier Verbindungslinien gröſser ist als die dritte, nie aber so, daſs sie kleiner ist, und es ist schwerlich anzunehmen, daſs diese Unmöglichkeit etwa den Besonderheiten des räumlichen Continuums beizumessen wäre. Ist dem so, so erscheint durch die obigen Rechnungsergebnisse die Unbrauchbarkeit jener Gestalt des relativen Unterschiedes, bei welcher die kleinere der distanten Gröſsen den Divisor abgiebt, endgültig dargethan, und die von der experimental-psychologischen Praxis meist vernachlässigte zweite Form bleibt als einzig diskutierbarer Fall noch übrig. Man hätte sich dann die Sachlage so vorzustellen, daſs die Punkte des Gröſsencontinuums zwar in einer Linie, aber nicht in einer geraden, sondern einer irgendwie gekrümmten Linie angeordnet wären, so daſs die den einzelnen Punktdistanzen zugeordneten Strecken auſserhalb dieser Linie, etwa in ein unrealisiertes Gebiet des sonach mindestens zweidimensionalen Continuums zu liegen kämen.

Den Eindruck des Ungezwungenen wird diese Auffassung

---

definition des „doppelten Unterschiedes" verliert alle Stringenz, sobald „Verschiedenheit" für „Unterschied" gesetzt wird, — zugleich der erste Beleg für die Wichtigkeit der oben § 21 getroffenen terminologischen Feststellung, dem noch weitere folgen werden.

[1] Die Scheinausnahme, welche die Hamiltonsche Vektorenmethode in der Addierbarkeit der Vektoren aufweist (vergl. Maxwell, *„Substanz und Bewegung"*, übersetzt von Fleischl, S. 7) hat ihren Grund doch nur in der eigentümlichen Symbolik dieser Methode, vergl. A. Höfler, „Zur vergleichenden Analyse der Ableitungen für Begriff und Gröſse der zentripetalen Beschleunigung" in der *Zeitschr. f. d. physik. u. chem. Unterr.* Jahrg. II. S. 280 f.

freilich kaum machen; um so mehr wird man durch die Thatsache überrascht, dafs die experimentelle Psychologie Erfahrungen aufgewiesen hat, die für Verifikationen dieser Auffassung gehalten werden könnten. Dafs geteilte Linien und Winkel gröfser scheinen als ungeteilte, fällt doch genau mit dem über die Gesamtheit der Teildistanzen in ihrem Verhältnis zur Gesamtdistanz Gesagten zusammen. Dies und namentlich die oben dargelegten Vorzüge des relativen Unterschiedes rechtfertigen das Unternehmen, der Natur der durch das eben ausgesprochene Distanzgesetz geforderten Kurve noch ein wenig nachzugehen.

§ 25. Das Distanzgesetz gemäfs der zweiten Gestalt des relativen Unterschiedes.

Es sei zu diesem Ende noch einmal ein Verfahren eingeschlagen, das uns bereits oben zur Entscheidung zwischen den beiden Formen des relativen Unterschiedes geführt hat. Denken wir uns das im Sinne der zweiten Gestalt des relativen Unterschiedes formulierte Distanzgesetz statt als von Gröfsen als von Raumpunkten gültig, und fragen wir nach der inneren Statthaftigkeit einer solchen Annahme. Natürlich geht bei dieser Übertragung auf den Raum die Haupteigenschaft unseres Gesetzes, die Distanzgröfse als Funktion der distanten Gröfsen darzustellen, verloren, weil Ortsbestimmungen keine Gröfsen sind. Dagegen darf man wohl erwarten, dafs, wenn unser Gesetz innerlich einwurfsfrei ist, an Stelle der Gröfsen solche Raumpunkte gesetzt werden können, dafs die aus der Lage dieser Punkte resultierenden Distanzen sich ihrer Gröfse nach ebenso zu einander verhalten wie die aus dem Gesetze sich ergebenden Distanzen der bezüglichen distanten Gröfsen. Dafs für ein im Sinne der ersten Gestalt des relativen Unterschiedes formulierten Gesetz solche Punkte nicht aufzubringen seien, war der Nerv der oben gegen diese Gestalt gerichteten Beweisführung; es war für diese nichts weiter erforderlich, als das fragliche Gesetz nur für drei Punkte im Raume gültig anzunehmen, um auf eine Unverträglichkeit geführt zu werden. Dagegen gestattete, wie wir sahen, die zweite Gestalt des relativen Unterschiedes die Übertragung auf den Raum innerhalb der oben berührten Grenzen, d. h. solange nur drei Vergleichsobjekte in Betracht kamen, ohne Schwierigkeit. Es

soll nun die Frage aufgeworfen werden, ob die Übertragung statthaft bleibt auch ohne die Einschränkung auf drei Gröfsen und drei Punkte, ob ihr also nichts im Wege steht, wenn sie für mehr als drei Objekte in voller Allgemeinheit vollzogen gedacht wird.

Näher sei die Aufgabe dahin präzisiert, dafs als distante Gröfsen die Reihe 1, 2, 3.... der natürlichen Zahlen — ob unbenannt oder gleichbenannt, dürfte belanglos sein — in Betracht gezogen werde. Es gilt, die im angegebenen Sinne allgemein vorgenommen gedachte Zuordnung von Raumpunkten in ihre Konsequenzen zu verfolgen. Die Auflösung dieser Aufgabe verdanke ich der freundlichen Bemühung meines verehrten Kollegen Professor von Dantscher, dessen diesbezüglichen, mir in gewohnter Hülfsfreudigkeit zur Verfügung gestellten Aufzeichnungen die folgende Rechnung in allen wesentlichen Punkten entnommen ist.

Es seien die Punkte des Euklidschen Raumes auf ein System rechtwinkliger Parallelkoordinaten bezogen; ferner seien die im Sinne unseres Distanzgesetzes den Zahlen 1, 2, 3..... zugeordnet gedachten Raumpunkte durch die Symbole (1), (2), (3)..... bezeichnet. Legen wir, was ja jedenfalls Sache freier Wahl ist, den Punkt (1) in den Ursprung des Koordinatensystems, den Punkt (2) in die x-Axe, und zwar in deren positive Hälfte, so erhalten wir, wenn wir die Koordinaten jedes der zugeordneten Punkte durch eine entsprechende Indexzahl kennzeichnen, zunächst:

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0, \qquad z_1 = 0,$$
$$x_2 = \frac{1}{2}, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = 0,$$

wobei die Länge von x_2 an sich natürlich ebenfalls noch willkürlich, der Zahlenwert aber im Hinblick auf unser Gesetz gewählt ist, da ja x_2 zugleich die Distanz des Punktes (1) vom Punkt (2) darstellt.

Aus diesen Voraussetzungen ergeben sich nun zuvörderst die Koordinaten des Punktes (3), da ja unserem Distanzgesetz zufolge, wenn wieder, wie oben, ein über die betreffenden Symbole gesetzter Querstrich die zwischen den betreffenden Objekten bestehende Distanz andeutet,

$$x_3^2 + y_3^2 = \overline{31}^2 = \frac{4}{9},$$

$$\left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 + y_3^2 = \overline{32}^2 = \frac{1}{9}$$

ist. Es folgt hieraus:

$$x_3 = \frac{7}{12},\ y_3 = \frac{\sqrt{15}}{12},\ z_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{I)}$$

wo die Willkür nur noch bei der Wahl des Vorzeichens für $\sqrt{15}$ freien Spielraum hat.

Nun lassen sich die Koordinaten x_n, y_n, z_n des **Punktes** (n) berechnen, da dessen Distanzen von den nunmehr bereits fixierten Punkten (1), (2), (3) einerseits durch unser Gesetz gegeben, nämlich

$$\overline{n\,1} = \frac{n-1}{n}, \qquad \overline{n\,2} = \frac{n-2}{n}, \qquad \overline{n\,3} = \frac{n-3}{n},$$

andererseits aber die Quadrate derselben durch die bekannte Distanzformel für rechtwinklige Koordinaten als Funktionen von x_n, y_n, z_n dargestellt werden. Man erhält so die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + y_n^2 + z_n^2 &= \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \\ \left(x_n - \frac{7}{12}\right)^2 + \left(y_n - \frac{\sqrt{15}}{12}\right)^2 + z_n^2 &= \left(\frac{n-3}{n}\right)^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{II)}.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{n^2 + 8n - 12}{4n^2} \\ y_n &= \frac{11n^2 + 120n - 324}{180n^2}\sqrt{15} \\ z_n &= \frac{(n-3)\sqrt{15}\sqrt{119n^2 + 144n - 864}}{45n^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{III)}.$$

Dieses Resultat kann einiges Befremden hervorrufen, wenn man zum Zwecke der Verifikation nun für n hintereinander die

speziellen Werte 1, 2 und 3 einsetzt und auf diesem Wege zwar für den Punkt (3) die oben sub I) berechneten Koordinatenwerte erhält, keineswegs aber ebenso für die Punkte (1) und (2) die oben festgesetzten Ausgangswerte. Es wäre aber voreilig, hieraus auf die Unhaltbarkeit unseres Distanzgesetzes zu schliefsen; und der Grund, weshalb ich einem solchen Irrtum hier ausdrücklich entgegentrete, liegt nur in der an mir selbst gemachten Erfahrung, wie leicht dieser Irrtum sich begehen läfst. Man übersieht dabei einfach, dafs unser Distanzgesetz von Anfang an gerade dadurch charakterisiert war, dafs die zur gröfseren Vergleichsgröfse gehörige Mafszahl in den Nenner zu stehen kommt, also, um vorübergehend wieder die früher gebrauchten Symbole a und b heranzuziehen, dafs

$$b \geqq a.$$

Es hiefse also geradezu eventuell die erste Gestalt des relativen Unterschiedes an Stelle der zweiten unterschieben, wollte man in den obigen Gleichungen III) dem n einen Wert kleiner als 3 erteilen. Setzt man dagegen $n = 3$, dann fällt die Probe, wie wir sahen, sofort völlig befriedigend aus. Immerhin ist also oben das Symbol n nur unter der Beschränkung einzuführen, dafs

$$n \geqq 3$$

ist. Eine Einwendung gegen die Statthaftigkeit unseres Distanzgesetzes ist hieraus in keiner Weise abzuleiten.

Anders stellt sich die Sache, wenn man den Vorzeichen der nach III) berechneten y_n und z_n nachgeht. Zunächst zeigt sich auch hierbei noch keine Schwierigkeit. Das Vorzeichen von $\sqrt{15}$ ist durch I) vorbestimmt; es mufs mit dem dort für y_3 gewählten übereinstimmen. Dagegen bleibt das Vorzeichen von

$$\sqrt{119\,n^2 + 144\,n - 864}$$

für einen Wert von $n > 3$ immer noch willkürlich; die einmal getroffene Wahl entscheidet aber zugleich auch für alle übrigen n. Nimmt man nämlich, was ja ohnehin am natürlichsten sein wird, die Bestimmung des fraglichen Vorzeichens für $n = 4$ vor, also für denjenigen Fall, wo nach III)

$$x_4 = \frac{9}{16},\ y_4 = \frac{83\sqrt{15}}{720},\ z_4 = \frac{\sqrt{15}\sqrt{101}}{180} \ldots\ldots \text{IV)}$$

ist, fixiert somit das Vorzeichen von $\sqrt{101}$, so tritt die Abhängigkeit des Vorzeichens von $\sqrt{119 n^2 + 144 n - 864}$ von der in dieser Weise getroffenen Wahl in der Gleichung

$$(x_n - x_4)^2 + (y_n - y_4)^2 + (z_n - z_4)^2 = \overline{n 4}^2 = \left(\frac{n-4}{n}\right)^2 \ldots\ldots\ \text{V})$$

zu Tage. Führt man darin die Ausdrücke III) und IV) ein, so folgt:

$$\left[\frac{n^2 + 8n - 12}{4n^2} - \frac{9}{16}\right]^2 + 15\left[\frac{11 n^2 + 120 n - 324}{180 n^2} - \frac{83}{720}\right]^2$$

$$+ 15\left[\frac{(n-3)\sqrt{119 n^2 + 144 n - 864}}{45 n^2} - \frac{\sqrt{101}}{180}\right]^2 = \left(\frac{n-4}{n}\right)^2$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$18(n-4)^2(103 n^2 + 144 n - 432) = [4(n-3)\sqrt{119 n^2 + 144 n - 864} - n^2\sqrt{101}]^2.$$

Führt man hier das Quadrat rechts vom Gleichheitszeichen aus und sondert dann noch den Faktor $-n^2$ ab, so ergiebt sich:

$$151 n^2 + 3120 n - 11664 = 8(n-3)\sqrt{101}\sqrt{119 n^2 + 144 n - 864}\ \text{VI})$$

Diese Gleichung müfste nun in der That geeignet sein, die eindeutige Verknüpftheit der Vorzeichen von

$$\sqrt{101} \quad \text{und} \quad \sqrt{119 n^2 + 144 n - 864}$$

erkennen zu lassen, wenn die darin ausgedrückte Relation für beliebige Werte von n überhaupt möglich wäre. Dies ist aber eben nicht der Fall, wie aus dem Umstande erhellt, dafs der Ausdruck $(119 n^2 + 144 n - 864)$ kein vollständiges Quadrat ist, indes links vom Gleichheitszeichen eine ganze rationale Funktion von n steht. Quadriert man die Gleichung VI), so erhält man nach Absonderung des Faktors $3^4 . 5$:

$$(n-4)^2[1843 n^2 + 3320 n - 28752] = 0 \ldots\ldots\ldots\ \text{VII}),$$

woraus unmittelbar zu ersehen ist, dafs die Relation VI) sich für rationale Werte von n nur unter einer einzigen Voraussetzung erfüllen läfst, unter der selbstverständlich realisierbaren nämlich, dafs n den Wert 4 annimmt.

§ 26. Ergebnisse.

Auch dieses Resultat ist nun nicht so beschaffen, daſs man daraus ohne weiteres den Schluſs ziehen könnte, das aut die zweite Gestalt des relativen Unterschiedes gebaute Distanzgesetz sei mit inneren Widersprüchen behaftet. Denn ohne Zweifel hängt die eben aufgewiesene Inkonvenienz zunächst an dem Versuche, die sich sonst allenthalben so wohl bewährende Raumsymbolik auch auf den Fall der Gröſsenverschiedenheiten zu übertragen. Und daſs dieser Fall die Symbolik zulassen müſste, dafür vermöchte ich zur Zeit einen Beweis nicht beizubringen. So viel aber läſst sich behaupten, daſs der relative Unterschied in der einzigen noch diskutierbar gebliebenen Gestalt auf eine Kurve führt, die im Euklidschen Raum nicht mehr unterzubringen ist, und von der mindestens sehr zweifelhaft bleiben muſs, ob sie in einem anders beschaffenen Raume Platz finden könnte, d. h. ob sie nicht in sich unmöglich ist. Unsere Funktion führt also entweder zu Widersprüchen oder doch zu einem so komplizierten Resultat, daſs man in ihr das zur Gröſsenmessung geeignete Surrogat trotz oben gewürdigter Vorzüge nicht wird anerkennen können. Es darf an dieser Stelle daran erinnert werden, daſs wir bereits in einem früheren Stadium dieser Untersuchung in dem endlichen Verschiedenheitsmaximum eine nicht unbedenkliche Konsequenz gerade der in Rede stehenden zweiten Form des relativen Unterschiedes angetroffen haben.

Es empfiehlt sich nun aber, obwohl wir im Hauptfragepunkte über negative Resultate immer noch nicht hinausgekommen sind, den Faden der auf die Gröſsenverschiedenheitsmessung gerichteten Untersuchung fallen zu lassen, bis wir ihn im folgenden Abschnitte, durch anderweitig zu gewinnende Bestimmungen unterstützt, hoffentlich mit Aussicht auch auf positiven Erfolg wieder aufnehmen können. Immerhin darf aber schon an dieser Stelle auf eine Art Nebenerfolg der vorstehenden Untersuchung hingewiesen werden. „Da wir“, bemerkt gelegentlich G. E. Müller,[1] „darüber, wie unser Vermögen der Beurteilung zweier Empfindungen als mehr oder weniger verschiedener zu stande komme, zur Zeit so gut wie nichts wissen, bisher auch nicht einmal

[1] *Zur Grundlegung*. S. 389.

der Versuch einer wirklich exakten Behandlung dieses Problemes vorliegt, so sind wir, wenigstens zur Zeit, nicht im mindesten im stande, auf rein theoretischem Wege etwas Sicheres darüber ausmachen zu können, ob gleiche Merklichkeit gegebener Empfindungsunterschiede auf gleiche absolute oder gleiche relative Gröſse derselben hinweise.“ Nun wird durch die Ausführungen des gegenwärtigen Abschnittes ein erster Schritt in der Richtung der von Müller mit Recht verlangten „exakten Behandlung“ hin wohl gethan sein; und soweit man ein Recht hat, aus „gleicher Merklichkeit“ auf gleiche Verschiedenheit zu schlieſsen,[1] oder eventuell, soweit dort, wo man vielfach lieber von Merklichkeit redet, eigentlich besser von Verschiedenheit und deren Gröſse geredet werden sollte,[2] sind wir nunmehr bereits in der Lage, die in betreff des absoluten und relativen Unterschiedes aufgeworfene Frage zu beantworten. Die Verschiedenheit zweier psychischer Daten fällt ihrer Gröſse nach weder mit dem absoluten noch mit dem relativen Unterschiede dieser Daten zusammen;[3] aber die Beziehung zum relativen Unterschiede ist eine ungleich engere. Zu gleichen Verschiedenheiten gehören, soweit das uns zugängliche Erfahrungsmaterial, insbesondere der Thatsachenkreis des Weberschen Gesetzes sich in dieser Frage verwerten läſst, gleiche relative, nicht aber gleiche absolute Unterschiede und umgekehrt, so daſs sich auch sagen läſst: jeder bestimmten Verschiedenheitsgröſse ist eine und nur eine Gröſse des relativen Unterschiedes, jeder Gröſse des relativen Unterschiedes ist eine und nur eine Verschiedenheitsgröſse zugeordnet.

Zum Zwecke der Fortführung der hiermit angebahnten Untersuchungen empfiehlt es sich nun aber, auch das Problem der „psychischen Messung“, resp. der funktionellen Beziehung zwischen „Reiz und Empfindung“ in den Bereich unserer Erwägungen zu ziehen.

[1] Vergl. oben S. 57 f.

[2] Vergl. oben § 10.

[3] Vorausgesetzt, daſs es einen „Unterschied“ zwischen den beiden Daten überhaupt giebt; in welchem Umfange diese Voraussetzung berechtigt ist, davon wird unten die Rede sein.

Fünfter Abschnitt.

Über psychische Messung und das Webersche Gesetz.

§ 27. Die Meſsbarkeit des Psychischen.

Man hat sich gewöhnt, in der Frage nach der Anwendbarkeit von Maſs und Zahl im Gebiete des Psychischen eine Prinzipienfrage zu erblicken und namentlich von deren affirmativer Beantwortung ein Ineinanderflieſsen der von Natur so scharfen Gegensätze Psychisch und Physisch zu besorgen. Indem man sich zugleich mindestens stillschweigend an die in dieser Sache traditionell gewordene Gegenüberstellung der intensiven und extensiven Gröſse hält, übersieht man meist, wie wenig gerade diese Gegenüberstellung jenen Gegensatz zu charakterisieren geeignet ist, da sie sowohl innerhalb des Physischen als innerhalb des Psychischen statthaft, ja unvermeidlich ist. Immerhin könnte einer, gleichviel mit welchen Aussichten auf Verwirklichung, für das Gebiet der physischen Thatsachen eine immer fortschreitende Verdrängung sowohl der Intensitäts- als der Qualitätsdaten durch extensive Bestimmungen erhoffen. Dagegen ist der Extensität ihr Anteil an den Thatsachen des psychischen Lebens schon dadurch gesichert, daſs sie jeder sie erfassenden Vorstellung wenigstens deren Inhalte nach ganz wesentlich angehört. Ist die Vorstellung ein psychisches Erlebnis, so sicher auch das, was in ihr vorgestellt wird, als Vorgestelltes.[1] In diesem Sinne ist also z. B. nicht nur die Vorstellung einer räumlichen Ausdehnung psychisch, sondern auch die vorgestellte räumliche Ausdehnung: und es ist nur der Unvollkommenheit des sprachlichen Ausdruckes beizumessen,

---

[1] Vergl. die sorgfältigen, wenn auch kaum in allen Punkten unangreifbaren Erwägungen F. H. Bradleys unter dem Titel: „*What do we mean by the intensity of psychical states.*“ Mind 1895, zunächst S. 2.

daſs mit der Wendung „eine räumliche Ausdehnung vorstellen“ ganz wohl auch auf ein Auſserpsychisches Bezug genommen sein kann, falls nämlich ein solches auſserhalb des Vorstellenden existiert und mit Hülfe jener Vorstellung erkannt wird.

Es wäre demgemäſs eine unmotivierte Beschränkung, wollte man die Frage nach der Meſsbarkeit des Psychischen etwa nur auf die psychischen Akte und nicht auch auf deren Gegenstände beziehen. Man hat sich eine solche Beschränkung thatsächlich auch gar nicht auferlegt; denn die sogenannte „Intensität der Empfindung“, unter deren Titel man die Angelegenheiten der psychischen Messung und der Maſsmethoden so gern abhandelt, ist, wie ich schon vor Jahren geltend gemacht habe,[1] eine Bestimmung nicht des Empfindens, sondern des Empfundenen. Auch die messenden Raum- und Zeitsinnuntersuchungen greifen an den betreffenden Inhalten an; und nur der Umstand, daſs man sich hier und sonst aus praktisch sicher stichhaltigem, sogleich zu berührendem Grunde dazu gedrängt fand, über die Beziehung des auſserpsychischen Agens zur psychischen Reaktion ins klare zu kommen, dürfte die Aufmerksamkeit so ganz und gar von der Thatsache abgelenkt haben, daſs auch ohne alle Rücksicht auf derlei „Beziehungen“ den vorgestellten Strecken, wenigstens den anschaulich vorgestellten, mindestens das, was J. v. Kries „theoretische Meſsbarkeit“ genannt hat,[2] so wenig abzusprechen ist, als den etwa wirklich existierenden Strecken.

Stellen wir uns nun in der That vorerst weiter keine Aufgabe als die, das theoretisch Meſsbare an den Bethätigungen psychischen Lebens aufzusuchen, so stehen der Lösung dieser Aufgabe nach dem oben über das Wesen und die Arten des Messens Festgestellten keinerlei Schwierigkeiten im Wege. Wir finden uns daher prinzipiell auf die im Gebiete des Psychischen anzutreffenden Gröſsen angewiesen,[3] und zwar zunächst natürlich auf die teilbaren, soweit eigentliche Meſsbarkeit dabei in Frage kommt. Als solche wurden die Gegenstände von Streckenvorstellungen oben erwähnt, die Gegenstände von

[1] „Über Begriff und Eigenschaften der Empfindung.“ *Vierteljahrsschr.* [illegible] S. 29 u. öfter.

[2] [illegible]

[3] [illegible] Grenzen der Meſsbarkeit zu [illegible]

Mengen-, zunächst Zahlenvorstellungen sind ihnen, innerhalb angemessener Grenzen natürlich, zur Seite zu stellen. Wird aber, wie billig, auch die surrogative Messung mit einbegriffen, so müssen in einer Aufzählung vor allem auch die Gegenstände von Distanzvorstellungen, vielleicht auch andere der im ersten Abschnitte etwas näher besprochenen Objekte höherer Ordnung, wie Geschwindigkeit, Dichte u. dergl., ihre Stelle finden.

Bei weitem nicht so leicht gelingt die Subsumtion unter den allgemeinen Messungsgedanken in demjenigen Falle, wo das Bedürfnis danach sich am meisten geltend gemacht hat, bei den psychischen Intensitäten,[1] unter denen bisher wieder die Intensitäten der Vorstellungsgegenstände im Vordergrunde der Beachtung geblieben sind. Dafs hier vor allem nicht von eigentlicher Messung die Rede sein könne, bedarf nach früherem keiner Darlegung mehr; Tonstärken lassen sich weder addieren noch subtrahieren,[2] und Gefühlsstärken, um das Gebiet der psychischen Akte mindestens im Vorübergehen zu berühren, auch nicht.[3] Immerhin könnte nun aber, was hier so der eigentlichen Messung versagt ist, mit Hülfe eines Surrogates erfolgen. Als solches bietet sich einigermafsen ungezwungen nur die Distanz, falls sich ein geeigneter fixer Punkt ausfindig machen läfst, auf den die betreffende Intensität durch Vergleichung bezogen werden kann. Man denkt wohl sogleich an den Intensitäts-Nullpunkt; aber, wie wir gesehen haben, ist die Null von jeder endlichen Gröfse gleich sehr, nämlich unendlich verschieden. Es ist in der That empfohlen worden,[4]

---

[1] F. H. Bradleys Annahme, wo Steigerung vorliegt, müsse auch ein Zuwuchs vorliegen (vgl. a. a. O. Mind 1895, z. B. S. 7), scheint mir der fundamentale Mangel an den oben angezogenen Ausführungen dieses Autors. Er verkennt eben, dafs es nicht zum Wesen der Gröfse gehört, teilbar zu sein (vgl. oben § 3).

[2] Vgl. auch Stumpf, *Tonpsychologie*. Bd. I. S. 399.

[3] Vgl. J. v. Kries a. a. O. (*Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1882) S. 275. In diesem Zusammenhange rangieren dann aber auch Fälle wie die der „Schönheit", „Langweiligkeit" u. dgl.; auch hier ist die Unbestimmbarkeit durch Zahlen nicht, wie Kries anzunehmen scheint (vgl. ibid. S. 292 f.), Sache der Vergleichung im allgemeinen, sondern, wie ich im Hinblick auf Abschnitt III der gegenwärtigen Untersuchungen kurz sagen kann, Sache der Teilvergleichung.

[4] Vgl. Stumpf, a. a. O. S. 397 ff.

den Nullwert durch einen ihm möglichst nahe stehenden, endlichen und zugleich möglichst fixen Wert, den Reizschwellenwert, zu ersetzen. Man wird diesem Vorschlage stattgeben können, ohne sich darüber zu täuschen, wie wenig damit das geleistet ist, was man sich beim Hinarbeiten auf eine „Empfindungsmessung“ zum Ziel gesteckt hatte. Im ganzen wird man sich über derlei Mängel um so leichter hinwegsetzen können, je sicherer der nun gewonnene klarere Einblick in die Natur der Messungsvorgänge zu der Erkenntnis führt, daſs Intensitäten statt Intensitätsdistanzen zu messen, bei Beschränkung auf eigentliche Messung kein billigeres Verlangen wäre, als wenn man an die einzelnen Orts- oder Zeitpunkte einen Maſsstab anlegen wollte, der sich doch nur an die Orts- oder Zeitstrecken anbringen läſst.

Je mehr sich einer durch ein Verfahren dieser Art an die primitive Temperaturmessung mittelst Thermometer erinnert finden mag, um so weniger wird es ihn befremden, damit vor den schon oben berührten Fall gelangt zu sein, wo das Maſsverfahren sogar über das Gebiet der Gröſsen hinaus anwendbar ist. Auch die verschiedenen Punkte eines Qualitätscontinuums bieten ja Distanzen, deren Vergleichung, wie das Experiment gelehrt hat, nicht minder zuverlässige Ergebnisse liefern kann, als die Vergleichung von Intensitätsdistanzen. Natürlich muſs sich also das für die Intensitäten brauchbare Verfahren sonach auch auf die Qualitäten übertragen lassen, wobei es erst Sache [illegible]sonderer Untersuchung wäre, ob dabei die „qualitativen Schwellen“ ähnliche Dienste leisten könnten, wie die quantitativen. Zu einer Erweiterung des Messungsbegriffes über das Gröſsengebiet hinaus wird solche Möglichkeit aber schwerlich einen Beweggrund abgeben können, — weit eher einen Hinweis darauf, daſs das fragliche Vorgehen schon bei Intensitäten an der Grenze dessen steht, was füglich auf den Namen und den Rang einer Messung Anspruch hat.[1]

[1] Sie scheint [illegible] überschritten bei dem, was Lipps (*Grundzüge der Logik*, S. 122) su[illegible]ive absolute Messung nennt. Nach ihm besteht „das absolute M[illegible] benen Farbe, einer Helligkeit, der Intensität irgend einer [illegible] d. h. der Gr[illegible] in dem — nicht der Unterschied dieser Farbe [illegible]er anderen, sondern diese selbst gegeben ist, in der [illegible]kbar Unterschiede, in die der qualitative [illegible], Intensität von der Farb-

Daſs die uneigentliche Messung bei „intensiven Empfindungen“ so wenig als sonst irgendwo das Recht gewährt, das in solcher Weise Gemessene als Vielfaches, als Unterschied oder dergl. zu betrachten, versteht sich von selbst, obwohl die betreffenden Maſszahlen dazu verleiten können. Es ist kaum überflüssig, hiervon einem Terminus gegenüber Anwendung zu machen, der zu den gebräuchlichsten der „Psychophysik“ gehört, ich meine die Bezeichnung „Empfindungszuwuchs“. Einen solchen kann es, wie nun ohne weiteres einzusehen ist, bei intensiven Empfindungen nie und nirgends geben; und da diese „intensiven Empfindungen“ am Ende doch die Empfindungen im eigentlichen Sinne sind, so wird man, soviel ich sehe, nichts Besseres thun können, als den in Rede stehenden Ausdruck aus dem Register der einwurfsfreien wissenschaftlichen Termini zu streichen. Er hat nicht nur bei den grundlegenden Formulierungen FECHNERS seine irreführende Rolle gespielt, sondern auch manche in ihrer Grundintention vollkommen berechtigte Angriffe auf diese Formulierungen [1] in einem Gewande gezeigt, das nur zu geeignet war, den wahren Wert derselben zu verhüllen. Auffallend bleibt es immerhin, daſs man sich trotz der Durchsichtigkeit der Sache stets so leicht entschlossen hat, mit dem im Grunde Undenkbaren zu operieren; ob es wohl allzu gewagt sein möchte, zur Erklärung dessen an die oben berührte [2] Möglichkeit der Zuordnung von Zahlen nach gleichen Verschiedenheiten zu denken? Hat es einen gleichviel wie ungenauen Sinn, von Empfindungen zu sagen, daſs sie sich verhalten wie 1 zu 2 zu 3 u. s. f., dann dürfte etwas wie ein vorgängig gutes Zutrauen auf beliebig weit gehende zahlenmäſsige Bestimmbarkeit der Empfindungen um vieles leichter

---

losigkeit, dem völligen Mangel der Helligkeit, dem Nullpunkt der Intensität sich zerlegt“. Das ist, von sonstigen Bedenken abgesehen, meines Erachtens nicht Messung, sondern nur noch Zuordnung. Vielleicht könnte man sagen: es ist der Fall der surrogativen Messung, wie er auch in der „Wärmemessung“ durch das Thermometer vorliegt, nur mit dem Unterschiede, daſs man es diesmal je nach dem bleibenden oder vollends dem vorübergehenden Zustande der Unterschiedsempfindlichkeit gleichsam mit verschiedenen „thermometrischen Substanzen“ und verschiedenen Skalen zu thun hat und über diesbezügliche Veränderungen meist recht unvollkommen unterrichtet ist.

[1] Vgl. unten § 32.

[2] Vgl. S. 76 f.

zu begreifen sein.[1] Vielleicht fällt von hier aus sogar auf J. MERKELS „*Methode der doppelten Reize*“ ein neues Licht, obwohl der diesem Verfahren zu Grunde liegende Gedanke der „doppelten Empfindung“ vor dem „Empfindungszuwuchs“ nicht das Geringste voraushaben kann.

Wesentlich günstiger stellt sich natürlich die Erfüllung der Aufgabe heraus, nicht Empfindungsintensitäten, sondern Veränderungen dieser Intensitäten zu messen. Baut sich der Veränderungsgedanke unvermeidlich auf den Verschiedenheitsgedanken auf, so geht Veränderungsmessung ebenso unvermeidlich auf Distanzmessung zurück. Freilich meint v. KRIES gelegentlich, es komme „auf dasselbe heraus“, zu sagen, „dafs die Empfindung E_m so und so vielmal so grofs sei als die Empfindung E_n“ oder „dafs die Veränderung der Empfindung von E_1 auf E_2 gleich sei . . . der Veränderung von E_k zu E_l“;[2] indes erscheint mir dies als Gleichbehandlung zweier grundverschiedenen Fälle. Gegen die „Empfindungszuwüchse“ meine ich mich im Vorhergehenden entschieden genug ausgesprochen zu haben; bei „Veränderung“ und „Distanz“ aber ist in keiner Weise von Zuwuchs die Rede. Die Gleichsetzung zweier Verschiedenheiten (zunächst des nämlichen Qualitätsgebietes) auf eine Linie zu stellen mit der „Gleichsetzung einer Raum- und einer Zeitgröfse“,[3] das schiene mir schon durch den äufserlichen Umstand ausgeschlossen, dafs auch nach KRIES' Meinung der ersteren Gleichsetzung ein Sinn wenigstens erteilt werden kann, indes die zweite Gleichsetzung durch keinerlei Kunstmittel von der in früherem Zusammenhange[4] charakterisierten

[1] Erfahrungen und Assoziationen soll darum ihr Anteil nicht abgesprochen sein, vgl. neuestens W. DITTENBERGER (Über das psychophysische Gesetz im *Arch. f. systemat. Philos.* Bd. II. S. 82 ff.), der aber auch oder eigentlich zunächst die Ergebnisse der „Methode der mittleren Abstufungen“ in dieser Weise zu verstehen versucht, indes man es da, wie aus früheren Darlegungen ersichtlich, mit ganz eigentlichen Distanzvergleichungen zu thun hat, die auf anderes als die Natur des zu Vergleichenden durchaus nicht angewiesen und auch von der Fähigkeit zur zahlenmäfsigen Bestimmbarkeit zunächst ganz unabhängig sind.

[2] A. a. O. (1882) S. 273.

[3] Vgl. a. a. O. S. 274, wo jedoch diese extreme Position nicht ausdrücklich aufgestellt ist, so dafs v. KRIES durch die im Texte folgenden polemischen Bemerkungen vielleicht gar nicht getroffen wird.

[4] Oben § 7.

Eigenschaft, ein Ungedanke zu sein, auch nur das Mindeste verlieren kann.

Mufs ich sonach, im Gegensatze zu dem von KRIES in der mehrfach erwähnten Abhandlung eingenommenen Standpunkte, im allgemeinem für die theoretische Mefsbarkeit des Psychischen eintreten, so werden im Hinblick auf das bisher Dargelegte wenige Worte genügen, um zu verhüten, dafs der Gegensatz gröfser erscheine, als er thatsächlich ist. Der allgemeinen These, „dafs intensive Gröfsen (theoretisch) unmefsbar sind, weil die Gleichsetzung verschiedener Zuwüchse (von a auf b und von p auf q) keinen Sinn hat",[1] kann ich zustimmen, sobald sie nur auf eigentliche Messung bezogen ist, immerhin mit dem Beisatze, dafs die Sinnlosigkeit der betreffenden Gleichsetzungen nicht in der Unanwendbarkeit des Gleichheitsgedankens, sondern in der des Zuwachsgedankens ihren Grund hat. Aufser der so mit Recht für alle intensiven Gröfsen abgelehnten eigentlichen Messung mufs aber KRIES selbst noch eine Messungseventualität offen lassen, da er Voraussetzungen namhaft macht, unter denen die physikalischen Intensitäten mefsbar sein sollen, die doch auch Intensitäten sind. Dafs zu dieser anderen Art Messung (ich habe sie die surrogative genannt) Festsetzungen über Gleichheit erforderlich wären, bestreite ich aus den seiner Zeit angeführten Gründen; ebenso bestreite ich im Sinne der obigen Ausführungen, dafs die für surrogative Messung erforderlichen Beziehungen zu Raum-, Zeit- und Zahlengröfsen herzustellen, auf dem Gebiete der Psychologie „selbstverständlich unmöglich" wäre.

Indem wir nun aber von der theoretischen Mefsbarkeit den Übergang zur praktischen Mefsbarkeit zu gewinnen versuchen, tritt uns die eigentliche Hauptschwierigkeit aller psychischen Messung entgegen. Sie ist gar nicht prinzipieller, aber dafür eben eminent praktischer Natur und besteht darin, dafs sich zu jenen Operationen, welche der physischen Messung eigentlich erst den Charakter der Exaktheit verleihen, auf psychischem Gebiete keine Gelegenheit findet, höchstens noch fragwürdige und jedenfalls ihrer Bedeutung nach verschwindende Ausnahmen abgerechnet. Es giebt darum keine eigentliche psychische Messung, die unmittelbar wäre, und keine surro-

---

[1] A. a. O. S. 275.

gative psychische Messung, bei der das psychische Surrogat eine unmittelbare Messung gestattete. Psychische Gröſsen können nicht anders gemessen werden, als unter Vermittelung physischer Gröſsen: die Feststellung des funktionellen Verhältnisses zwischen physischen und psychischen Gröſsen wird dadurch zum unabweislichen Bedürfnis, — die Befriedigung dieses Bedürfnisses die unerläſsliche Voraussetzung aller psychischen Messung.

§ 28. Die Konsequenzen aus dem Weberschen Gesetz.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, daſs man der Regelmäſsigkeit, die im Weberschen Gesetze von der Konstanz der relativen Unterschiedsempfindlichkeit ihren Ausdruck gefunden hat, vor allem deshalb ein so groſses Interesse zuwendet, weil dieses Gesetz etwas Näheres über die Beziehung zwischen dem erregenden physischen und dem erregten psychischen Vorgang oder, wie man sich kürzer, wenn auch vielleicht mit ungehöriger Einschränkung auf das Empfindungsgebiet zu sagen gewöhnt hat, zwischen Reiz und Empfindung zu verraten verspricht. Freilich hat die theoretische Verarbeitung dieser Gesetzmäſsigkeit gelegentlich zu weitgehenden Umdeutungen derselben Anlaſs gegeben, durch welche sie der Eignung, über jene Relation zwischen Physischem und Psychischem Aufschluſs zu geben, verlustig gehen müſste. Natürlich wird man sich aber nur im Notfalle zu solchem Verzicht verstehen; es lohnt sich also jedenfalls, vor allem festzustellen, welcher Art die dem Gesetze zu entnehmenden Aufschlüsse sind, falls wir es in, wenn man so sagen darf, möglichst natürlicher Weise verstehen, d. h. eben auf Reiz und Empfindung beziehen.

Bezeichnen wir zu diesem Ende mit r_1, r_2, r_3 und r_4 vier Reize, mit e_1, e_2, e_3 und e_4 die zugehörigen Empfindungen, so besagt das Webersche Gesetz, daſs, falls von den Reizen die Proportion gilt

$$r_1 : r_2 = r_3 : r_4,$$

die zugehörigen Empfindungspaare gleiche Verschiedenheit aufweisen, daſs also im Sinne der oben angewendeten Bezeichnung

[illegible] $= {}_3V_4$

ist. Haben die in den vorhergehenden Abschnitten geführten Untersuchungen über Verschiedenheit und Merklichkeit Richtiges ergeben, so liegt in der eben ausgesprochenen Behauptung kaum mehr als eine etwas abgeänderte Formulierung des WEBERschen Gesetzes, in keinem Falle aber eine irgendwie charakteristische theoretische Zuthat vor. Um zu den für die Frage nach dem Verhältnis von Reiz und Empfindung relevanten Konsequenzen des Gesetzes überzugehen, ist es erforderlich, die beiden Eventualitäten, daſs diese teilbare oder unteilbare Gröſsen oder, wie man kürzer und für den augenblicklichen Bedarf wohl ohne Gefahr von Miſsverständnissen sagen könnte, daſs sie extensive oder intensive Empfindungen sind, auseinanderzuhalten.

Indem wir nun aber in betreff der „intensiven Empfindungen" uns auf die Feststellungen des vorigen Abschnittes zurückgewiesen finden, die, wenn auch nicht ausschlieſslich, so doch in nicht unerheblichem Maſse bereits mit Hülfe der Thatsachen des WEBERschen Gesetzes gewonnen wurden, mag sich gegen dieselben unter dem Einflusse der gegenwärtigen Fragestellung noch eine Art nachträglichen Bedenkens geltend machen, dem hier zuvörderst kurz Rechnung getragen sei. Haben wir, — so mag der Einwand etwa zu formulieren sein — bei Ablehnung der Differenz als Surrogat für die Verschiedenheitsmessung die Thatsachen des WEBERschen Gesetzes nicht vielleicht bloſs unter stillschweigender Voraussetzung einer Interpretation dieser Thatsachen zu verwerten vermocht, welche das zu Beweisende bereits in sich schloſs? Wir haben uns darauf gestützt, daſs z. B. 1 von 2 cm gleich verschieden ist, wie 2 von 4 cm, und hatten dabei nicht nur den physischen, sondern ebenso, ja in erster Linie den psychischen Centimeter, man gestatte den Ausdruck, im Auge. Was konnte nun diese Thatsache gegen den Parallelismus von Unterschied und Verschiedenheit beweisen, wenn angenommen werden dürfte, daſs den physischen Strecken von 1, 2 und 4 cm eben derartige psychische Strecken zugeordnet sind, daſs die erste von der zweiten dieser psychischen Strecken den gleichen Unterschied aufwiese, wie die zweite der dritten gegenüber? Mir scheint nun, daſs es, um eine solche Eventualität auszuschlieſsen, deshalb einer besonderen Annahme nicht bedarf, weil diese Eventualität schon ganz einfachen Erwägungen gegenüber nicht standhält. Die Frage, um was

die psychische Ein-Centimeter-Strecke von der psychischen Zwei-Centimeter-Strecke, und um was diese von der psychischen Vier-Centimeter-Strecke unterschieden ist, ceteris paribus natürlich, darauf kann jedermann mit mäſsiger Phantasie durch eine Art idealer Superposition od. dergl. eine ganz überzeugende Antwort gewinnen. Dieselbe wird dann auch ohne weiteres die Überzeugung mit sich führen, daſs die betreffenden zwei „Unterschiede" nichts weniger als gleich sind.

Nach günstiger Erledigung dieser Vorfrage gestaltet sich nun alles Weitere sehr einfach. Zunächst fällt wohl jedem die äuſserliche Übereinstimmung in die Augen, welche die obige Formulierung des Weberschen Gesetzes mit dem Hauptergebnis des vierten Abschnittes aufweist. Als solches ist am Ende dieses Abschnittes die Feststellung bezeichnet worden, daſs, so wenig das geometrische Verhältnis oder der relative Unterschied zweier (teilbaren) Gröſsen mit der Gröſse ihrer Verschiedenheit zusammenfällt, dem geometrischen Verhältnisse wie dem relativen Unterschiede doch eine und nur eine Verschiedenheitsgröſse zugeordnet ist, so daſs aus Gleichheit des Quotienten- resp. des relativen Unterschiedes stets auf Gleichheit der Verschiedenheit gefolgert werden darf und umgekehrt. Sind also zwei Gröſsenpaare gleich verschieden, so sind sie auch proportional; für den speziellen Fall, daſs unsere e diese Gröſsen sind, ist damit ein Zusammengehen von Proportionalität und Verschiedenheitsgleichheit ganz ebenso gegeben wie durch das Webersche Gesetz, nur mit dem Unterschiede, daſs letzteres Proportionalität der Reize mit Verschiedenheitsgleichheit bei den Empfindungen verbindet, indes im vorigen Abschnitte Proportionalität und Verschiedenheitsgleichheit von denselben Gröſsen, mochten sie Reize oder Empfindungen oder was sonst für Gröſsen sein, erwiesen wurde.

Näher folgt sonach aus der durch das Webersche Gesetz garantierten Verschiedenheitsgleichheit bezüglich der extensiven Empfindungen deren Proportionalität, also:

$$e_1 : e_2 = e_3 : e_4,$$

umgekehrt [illegible] [illegible]ortionalität der Reize deren Verschiedenhe[illegible]

$$_{r_1}V_{r_2} = _{r_3}V_{r_4}.$$

Man kann auch sagen: das Webersche Gesetz ergiebt, daſs gleich verschiedenen Reizen gleich verschiedene Empfindungen zugehören und umgekehrt; Hand in Hand damit geht, da wir es mit extensiven Empfindungen zu thun haben, die Thatsache, daſs proportionalen Reizen proportionale Empfindungen entsprechen und umgekehrt, und es liegt nahe genug daraufhin auch Proportionalität zwischen Reizen und Empfindungen zu vermuten als die einfachste Weise, in der die Proportionalität der Reize unter sich und der Empfindungen unter sich ihrem gesetzmäſsigen Zusammengehen nach zu verstehen wäre.

Gehen wir nunmehr zu den intensiven Empfindungen über, so entfällt mit der Extensität auch alles über Proportionalität bei den Empfindungen Gesagte, und nur die Verschiedenheitsgleichheit bleibt übrig. Der Satz, daſs zu gleich verschiedenen Reizen gleich verschiedene Empfindungen gehören, gilt natürlich auch hier. Will man intensive Gröſsen, sofern sie verschiedenheitsgleich sind, quasi-proportional nennen, was, wenn man den konventionellen Charakter solcher Benennung[1] im Auge behält, gerade dort, wo wenigstens von der Seite der Reize her für Proportionalität im eigentlichen Sinne gesorgt ist, ganz angemessen sein möchte, so kann man also, was das Webersche Gesetz über das Verhalten von Reiz und Empfindung lehrt, zusammenfassend auch so aussprechen: Proportionalen Reizen entsprechen proportionale (extensive) oder quasi-proportionale (intensive) Empfindungen, und es liegt nahe, auf Grund dessen Proportionalität oder Quasi-Proportionalität zwischen Reiz und Empfindung zu vermuten.

Welche Rolle sonach den Reizgröſsen bei der Messung extensiver Empfindungen zukommt, kann weiter nicht zweifelhaft sein. Hält man sich insbesondere, sei es der vorgängigen Wahrscheinlichkeit des Einfachen wegen oder aus irgend

[1] Eine gewisse Stütze fände diese Bezeichnung immerhin in dem Umstande, daſs gleich verschiedene Gröſsen dieser gleichen Verschiedenheit nach auch demselben Paare von Zahlengröſsen, nicht minder aber auch verschiedenheitsgleichen Paaren oder, was hier wieder zusammenfällt, proportionalen Paaren von Zahlengröſsen zugeordnet sind, vergl. oben S. 76 f. — Daſs überdies auch sonst für den vulgären Proportionalitätsgedanken Verschiedenheitsgleichheit das zunächst Maſsgebende ist, wurde bereits in früherem Zusammenhange (oben S. 98) berührt.

welchen anderen Gründen,[1] an die Annahme der Proportionalität zwischen Reiz und Empfindung, so können eventuell die für den Reiz gefundenen Maſszahlen ohne weiteres auf die Empfindung übertragen werden. Dagegen ist die surrogative Messung intensiver Empfindungen allerdings, wie oben berührt, auf die Messung der Empfindungsverschiedenheiten angewiesen; daſs aber wenigstens in betreff der letzteren das WEBERsche Gesetz unter allen Umständen eine ganz wesentliche Hülfe an die Hand giebt, ist durch die Art der Zuordnnng gewährleistet, welche diesem Gesetze zufolge die Empfindungverschiedenheiten an Reizverschiedenheiten knüpft. Und vielleicht sind wir im stande, die Bedeutung des WEBERschen Gesetzes in dieser Richtung noch um einige Schritte weiter zu verfolgen, wenn zuvor ein Hindernis beseitigt ist, das der Annahme der hier dargelegten Ergebnisse noch im Wege stehen möchte.

So einfach diese Ergebnisse nämlich sind, so leicht der Weg, auf dem sie gewonnen wurden, sich übersehen läſst, so völlig widerspricht es der logarithmischen Funktion, die man sich aus dem Gesetze von der konstanten relativen Unterschiedsempfindlichkeit abzuleiten gewöhnt hat. Es ist unter solchen Umständen unerläſslich, den dieser Ableitung wesentlichen Gedanken etwas näher zu treten.

§ 29. Die Ableitung des FECHNERschen Gesetzes aus dem WEBERschen.

Es ist eigentlich eine ziemlich selbstverständliche Sache, daſs der Umweg über Differentiation und Integration bei psychischen Thatsachen ein Kunstgriff ist, dessen man, ohne dem „Untermerklichen“ jede Bedeutung absprechen zu wollen,[2] doch mit Rücksicht auf die Thatsache der Unterschiedsschwelle womöglich lieber entraten wird, zumal die Stetigkeit des Empfindungsgebietes, wie schon früher gelegentlich berührt,[3] eine keineswegs selbstverständliche, übrigens bekanntlich auch nicht

[1] Daſs ich die Versuchsergebnisse J. MERKELS als Beweis nicht gelten lassen kann, ist nach Früherem (oben S. 91 ff.) eigentlich selbstverständlich, vergl. übrigens auch unten § 33.

[2] Vergl. W. DITTENBERGER, „Über das psychophysische Gesetz“ im *Arch. f. system. Philos.* Bd. II. S. 76.

[3] Vergl. oben S. 78 f.

unbestrittene Sache ist.[1] Zudem hat speziell Fechners Ableitung seiner „Maſsformel“ aus der „Fundamentalformel“ auf Schwierigkeiten geführt,[2] deren Berücksichtigung den Fortgang dieser Untersuchungen nur aufhalten könnte. Dagegen erwarte ich mir eine Förderung dieses Fortganges von der bekannten „elementaren“ Ableitung, der nur eine vom Herkömmlichen etwas abweichende Form[3] gegeben werden soll, einmal, weil mir diese Form in besonderem Maſse übersichtlich scheint, dann aber, weil sich an sie in besonders leichter Weise einige Weiterführungen anknüpfen lassen, von denen unten die Rede sein wird.

Bezeichnen wir, wie oben, mit r und e Reiz und Empfindung, und zwar so, daſs die zusammengehörigen Termini wieder durch übereinstimmende Indices kenntlich gemacht sind, — versteht man ferner dem Herkommen gemäſs das Webersche Gesetz dahin, daſs gleichen absoluten Empfindungsunterschieden gleiche relative Reizunterschiede, also gleichen Empfindungsdifferenzen gleiche Reizquotienten entsprechen, — wählt man schlieſslich aus den Reizen eine geordnete Reihe $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots, r_n$ derart aus, daſs je zwei benachbarte Maſszahlen immer den nämlichen Quotienten ϱ ergeben, so muſs dieser Reihe eine Reihe von zugehörigen Empfindungen $e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots, e_n$ entsprechen, welche sämtlich zusammen mit den bezüglichen Nachbarn die nämliche

---

[1] Für W. Dittenbergers allgemeine Behauptung, daſs „alle Versuche, das logarithmische Gesetz auf einem die theoretische Einführung der unendlich kleinen Empfindungs- und Reizunterschiede vermeidenden Wege herzuleiten, als verfehlt anzusehen“ sei (a. a. O. S. 81 f.), vermisse ich die allgemeine Begründung. Übrigens meine ich, daſs, was ich im Folgenden gegen die logarithmische Empfindungs-Maſsformel beizubringen habe, zuletzt jeder beliebigen Ableitung gegenüber in Kraft bleibt, daher auch im Hinblick auf die neuesten Vertreter einer solchen Formel (auſser Dittenberger gehört hierher Chr. Wiener, „Die Empfindungseinheit zum Messen der Empfindungsstärke“, *Wiedemanns Ann.* 1892. S. 659 ff.) Aktualität behält.

[2] Vergl. A. Höfler in der Anzeige von *A. Elsas' Schrift*, „Über die Psychophysik“ in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1887. S. 356 ff., und M. Radaković, „Über Fechners Ableitungen der psychophysischen Maſsformel“, Jahrgang 1890 *derselben Zeitschrift*.

[3] Der Hauptgedanke derselben wurde meines Wissens zum ersten Male von A. Höfler gelegentlich seiner Beteiligung an den Grazer experimental-psychologischen Übungen des Wintersemesters 1886/87 entwickelt.

Differenz darbieten, für welche etwa das Symbol ε in Anwendung kommen mag. Wir erhalten also übersichtlich:

$$\begin{array}{llll}
\frac{r_2}{r_1} = \varrho & \text{und entsprechend} & & e_2 - e_1 = \varepsilon, \\
\frac{r_3}{r_2} = \varrho & \text{"} & \text{"} & e_3 - e_2 = \varepsilon, \\
\vdots & & & \vdots \\
\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = \varrho & \text{"} & \text{"} & e_{n-1} - e_{n-2} = \varepsilon, \\
\frac{r_n}{r_{n-1}} = \varrho & \text{"} & \text{"} & e_n - e_{n-1} = \varepsilon.
\end{array}$$

Durch Multiplikation im Falle der ersten, Addition im Falle der zweiten Reihe erhalten wir:

$$\frac{r_n}{r_1} = \varrho^{n-1} \qquad \text{und} \qquad e_n - e_1 = (n-1)\,\varepsilon.$$

Aus jeder der beiden Gleichungen läfst sich der Wert von $n-1$ berechnen. Wir verbinden die Ergebnisse zu der Gleichung:

$$\frac{e_n - e_1}{\varepsilon} = \frac{\log r_n - \log r_1}{\log \varrho}, \text{ daher:}$$

$$e_n - e_1 = (\log r_n - \log r_1)\,\frac{\varepsilon}{\log \varrho} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I)}.$$

An dem rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrucke verdient vor allem der Bruchfaktor unsere Aufmerksamkeit. Wie leicht zu ersehen, ist nämlich ε und ϱ zwar für die in Betracht gezogenen Reihe der r und e konstant, nicht aber für beliebige, nach obigem Schema herauszuhebende Reihen von r und e; man könnte ja den r einmal etwa die Werte 1, 2, 4, 8, ..., ein andermal die Werte 1, 3, 9, 27, ... erteilen u. s. f. Dennoch ist der in obiger Weise gebildete Bruch auch

für beliebige Reihen konstant, indem bei anderen r-Werten auch entsprechend andere e-Werte zugeordnet auftreten. Auch diese Konstanz läſst sich leicht auf elementarem Wege darthun. Bezeichnen wir vorübergehend das Anfangs- und Endglied der oben betrachteten r-, resp. e-Reihe bezüglich mit den Indexbuchstaben a und b, so erhält die obige Gleichung I) die Gestalt:

$$e_b - e_a = (\log r_b - \log r_a) \frac{\varepsilon}{\log \varrho}.$$

Nun hätte sich aber der Zwischenraum zwischen e_b und e_a, statt, wie es oben geschehen ist, in n auch in n' gleiche Teile zerlegen lassen. Es wäre dadurch eine neue e-Reihe entstanden, natürlich wieder eine arithmetische Reihe, der dem Weberschen Gesetze zufolge wieder eine geometrische Reihe von r-Werten zur Seite stehen müſste. Anfangs- und Endglied hätte nach der Voraussetzung die zweite e-, wie die zweite r-Reihe mit der ersten e-, resp. r-Reihe gemein; die Differenz ε wäre aber durch ein ε', der Quotient ϱ durch ein ϱ' ersetzt. Für diese gilt aber, da sich auf die neuen Reihen die alten Erwägungen durchaus wieder anwenden lassen, die Relation:

$$e_b - e_a = (\log r_b - \log r_a) \frac{\varepsilon'}{\log \varrho'}.$$

Die Gleichung unterscheidet sich, wie man sieht, von der vorigen nur im Zähler und Nenner des Bruches; der neue Bruch ist einfach an Stelle des alten getreten, muſs also den nämlichen Wert haben, wie dieser. Und da diese Betrachtungen sich für beliebige r- und e-Reihen obiger Beschaffenheit wiederholen lieſsen,[1] so können wir ganz allgemein sagen:

$$\frac{\varepsilon}{\log \varrho} = C,$$

[1] Dem Zweifel L. Langes (Über das Maſsprinzip der Psychophysik und den Algorithmus der Empfindungsgröſsen" in *Wundts Philos. Stud.* Bd. X. S. 135), ob „zwei Empfindungsunterschiede . . . . . ., wofern sie mit Hülfe einer beliebigen Sprossenweite untersucht, gleichviel Sprossen zu enthalten scheinen, dann auch unmittelbar als gleich groſs dem Bewuſstsein sich darstellen müſsten", habe ich nichts anderes entgegenzuhalten wie den oben § 9 berührten Scheinparadoxien. Der Grundsatz: „Gleiches in gleichviel gleiche Teile geteilt ergiebt Gleiches" gilt a priori von allem Teilbarem; Raumstrecken haben darin vor anderen

wo C eine Konstante bedeutet, deren Wert unter sonst günstigen Umständen eben mit dem Werte dieses Bruches bestimmbar sein mufs.

Aufserdem können wir nun in I) die üblichen vereinfachenden Spezialisierungen vornehmen: e_1 kann als auf der Schwelle liegend, daher $= 0$ angenommen, der zugehörige Wert von r_1, der Schwellenwert, kann als Einheit für die Mafszahlen der r betrachtet werden. Wir erhalten dann unmittelbar:

$$e_n = C \log r_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II)},$$

die bekannte Hauptformel, auf welche man die Ansicht gründet, dafs die Empfindung sich nicht proportional dem Reize, sondern proportional dem Logarithmus des Reizes verändere.

§ 30. Kritik der Ableitung.

Es ist kaum anzunehmen, dafs, wer den Untersuchungen der vorhergehenden Abschnitte zustimmend gefolgt ist, in betreff des wunden Punktes der eben vorgeführten Ableitung oder auch jeder anderen zum selben Ziele führenden im Zweifel sein kann. Die Schwäche der Ableitung liegt in der Differenz $e_n - e_1$, wenigstens sofern unter den e vorgestellte (zunächst empfundene) Intensitäten verstanden werden.[1] Es war wiederholt Gelegenheit, hervorzuheben, dafs solche Intensitäten sich weder addieren, noch subtrahieren lassen; nicht gleiche

---

Strecken nichts voraus, zumal sie eventuell nicht deshalb gleich „heifsen", weil sie „zur . . . Deckung gebracht werden können" (a. a. O. S. 133), sondern sich vielmehr eben deshalb zur Deckung bringen lassen, weil sie gleich sind (vergl. oben § 6). LANGES Berufung auf die „intensive" Natur der Empfindung (a. a. O. S. 135) aber trifft nicht den eben formulierten Grundsatz, sondern den Gedanken des Empfindungsunterschiedes, dem gegenüber ich im Bisherigen wohl deutlich genug Stellung genommen habe, der aber allen Ableitungen des FECHNERSchen Gesetzes gleich wesentlich ist.

[1] Anders natürlich, wenn dem einzelnen e keine andere Bedeutung beigemessen wird, als anzugeben, „wieviel Empfindungsstufen oder Merklichkeitsstufen der Empfindung bis zu einem gegebenen Reize liegen, ohne gewissermafsen über den Inhalt dieser Stufen etwas auszusagen" (MERKEL, *Philos. Stud.* Bd. X. S. 153). Aber eine derart bedingte Rehabilitierung der Logarithmenformel kann den Ansprüchen gegenüber, die man sich einmal an diese Formel zu stellen gewöhnt hat, doch nur zu Mifsverständnissen führen.

Empfindungsunterschiede also, deren es weder giebt noch geben kann, sondern gleiche Empfindungsverschiedenheiten entsprechen gleichen Reizverhältnissen. Wir stehen hier, wie schon einmal, vor einem Falle von Verwechselung des Unterschiedes mit der Verschiedenheit, und werden solcher Verwechselungen nun noch mehrere antreffen.

Läſst sich nun aber der ohne Zweifel begangene Fehler nicht gerade unter den besonderen hier vorliegenden Umständen mit leichter Mühe gut machen? Wenn wir das Symbol für „minus" zum Symbole für „Verschiedenheit" umdeuten, scheint die ganze Ableitung aufrecht bleiben zu können, ohne daſs am Ergebnis Wesentliches verloren ginge. Was uns nämlich II) dann bietet, ist der Aufschluſs darüber, um wie viel die Intensität e_n von der Intensität 0 verschieden ist, und dieser Betrag, so möchte man meinen, muſs am Ende doch mit dem absoluten Werte des e_n zusammenfallen, so gewiſs der absolute Zahlenwert 2 oder 3 von der Null um nicht mehr und nicht weniger als 2 resp. 3 verschieden sein kann. Aber könnte wirklich in irgend einem Falle eine Intensitäts- oder Zahlengröſse einer Relationsgröſse genau oder auch nur ungenau gleich sein? Man wird leicht gewahr, daſs diese Erwägung neuerlich der Verwechselung von Unterschied und Verschiedenheit verfallen ist. Der Betrag „um den" eine Gröſse von einer anderen qualitativ gleichen „verschieden" ist, ist der Unterschied und nicht die Verschiedenheit. Der Unterschied einer Gröſse von der Null fällt natürlich mit dieser Gröſse zusammen, falls die betreffende Gröſse sonst eine derartige Betrachtungsweise gestattet: wie wenig bei der Verschiedenheit das Nämliche der Fall ist, erhellt schon daraus, daſs, wie wiederholt erwähnt, die Verschiedenheit der endlichen Gröſse von der Null für unendlich groſs gelten muſs und für beliebige endliche Gröſsen gleich bleibt.

Man kann nun freilich den letzten Fehler dadurch vermeiden, daſs man dem e_1 nicht Nullwert, sondern einen der Null möglichst nahen endlichen Wert erteilt; aber die unberechtigte Gleichsetzung von Unterschied und Verschiedenheit ist dadurch natürlich in keiner Weise beiseite geschafft. Sie kann auch in keiner Weise beiseite geschafft werden, auch nicht durch eine „Festsetzung", und so radikal in gewissem Sinne schon die von J. v. Kries in dieser Sache eingenommene Oppositionsstellung erscheinen mag, ich kann nicht anders, als hierin

noch radikaler sein. „Wir können festsetzen", meint KRIES,[1] „dafs die eben merklichen Empfindungszuwüchse in einer ganzen Intensitätsreihe als gleich betrachtet werden sollen. Thun wir dies, so können wir nun eine Anzahl beobachteter Thatsachen so ausdrücken, dafs wir den Empfindungen ein Wachstum mit dem Logarithmus des Reizes zuschreiben". Sehe ich recht, so können wir derlei niemals festsetzen, weil wir keinerlei Bestimmungen über „Zuwüchse" zu treffen in der Lage sind, die es der Natur der Sache nach weder giebt, noch geben kann. Die Ableitung der FECHNERschen Formel kann niemals von Empfindungs-, sondern immer nur von Distanzgröfsen ihren Ausgang nehmen; und nur etwa, wenn man sich bescheidet, die Distanzen in der oben[2] berührten Weise als sehr unvollkommene Surrogate an Stelle der Intensitäten treten zu lassen, dürfte gegen die Anwendung der Logarithmenformel auf Empfindungen nichts Triftiges einzuwenden sein.

Ein Fall ist nun aber freilich hier noch besonders zu erwägen, sofern er die eben sozusagen a limine abgelehnte Differenz denn doch ganz wohl in Rechnung zu ziehen gestattet: ich meine den Fall, wo unter den e selbst bereits vorgestellte Strecken oder allenfalls Distanzen gemeint sind. Hier hat ein Ausdruck von der Form $e_2 - e_1$ einen ganz strengen Sinn; soweit überdies das WEBERsche Gesetz sich bewährt, stünde hier also die Sache der Logarithmenformel augenscheinlich wesentlich günstiger, als bei den Empfindungsintensitäten. Nun bedeutet aber die blofse Möglichkeit, von Differenzen zu reden, doch noch entfernt nicht die Berechtigung, auf sie eine Gesetzmäfsigkeit zu beziehen, die nicht von ihnen, sondern von Verschiedenheiten gilt. Ich zweifle, wie schon oben berührt, gar nicht daran, dafs vorgestellte Strecken sich innerhalb gewisser Grenzen ganz ebenso addieren und subtrahieren lassen, als dies von jenen äufseren Quasi-Reizen gilt, auf welche wir die Quasi-Wahrnehmungen von Strecken zurückdatieren. Besagte also das WEBERsche Gesetz, dafs, wenn die äufseren Strecken, (der Ausdruck mag vorübergehend der Kürze halber gestattet sein), sich verhalten etwa wie 2 : 4 : 8, die inneren Strecken gleiche Unterschiede aufweisen, also sich wie

---

[1] A. a. O. (*Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1882) S. 276.
[2] Vergl. S. 117 f.

1 : 2 : 3 verhalten müssen, dann hätte die Logarithmenformel hier durchaus recht. Das WEBERsche Gesetz verlangt aber für die gegebene Sachlage Gleichheit der Verschiedenheiten der inneren Strecken: 1 und 2 einerseits, 2 und 3 andererseits sind aber nicht gleich verschieden, weil der Verschiedenheit zwischen 1 und 2, wie wir wissen, nur die zwischen 2 und 4 entspricht. Auch hier kommt die Logarithmenformel erst durch die Verwechselung von Unterschied und Verschiedenheit zum Vorschein; begeht man die Verwechselung nicht, so resultiert nur in völliger Übereinstimmung mit der oben[1] angestellten allgemeinen Betrachtung, daſs zu gleich verschiedenen äuſseren Strecken auch gleich verschiedene innere Strecken gehören. — Zu einem Versuche, die Formel durch Umdeutung für surrogative Messung aufrecht zu halten, fehlt hier natürlich jeder Anlaſs: man wird nichts surrogativ messen, was man eigentlich messen kann.

Überblicken wir sonach, was die Prüfung der Ableitung ergiebt, welche den Beweis für die Geltung der Logarithmenfunktion abgeben soll, so können wir uns der Erkenntnis nicht entschlagen, daſs das WEBERsche Gesetz in betreff der Beziehung von Reiz und Empfindung im Grunde gerade das Entgegengesetzte von dem wirklich bedeutet, was man für seine Bedeutung zu halten pflegt. Das WEBERsche Gesetz soll darthun, daſs die Empfindung — das Wort sei hier ausreichend weit verstanden, um, soweit dies erforderlich ist, auch Relations- und Komplexionsinhalte in sich zu begreifen — nicht proportional dem Reize, sondern proportional dem Logarithmus des Reizes wachse und abnehme. Was das WEBERsche Gesetz wirklich darthut, ist, daſs die Empfindung sich ganz gewiſs nicht proportional dem Logarithmus des Reizes verändert, vielmehr gar kein Grund vorliegt, von der nächstliegenden Annahme der Proportionalität zwischen Empfindung und Reiz abzugehen, wo und soweit diese Annahme überhaupt einen Sinn hat.

Solchem Ergebnisse gegenüber ist denn doch die Frage am Platze, woher das Logarithmengesetz, obwohl es jederzeit als eine Art Paradoxon behandelt wird, doch jenen Anschein von Richtigkeit hat, aus welcher Quelle insbesondere die üblichen

---

[1] Vergl. § 28.

Beispiele, von den zwei und drei Kerzen im dunklen Zimmer angefangen bis zur „fortune physique“ und „fortune morale“, jene Überzeugungskraft schöpfen, welcher das WEBERsche Gesetz in seiner Umformung als Logarithmengesetz die grofse Popularität zu verdanken hat, die ihm weit mehr noch aufserhalb als innerhalb des Kreises der Fachpsychologen zukommt.[1] Mir scheint die Antwort auf diese Frage nicht eben schwer findbar zu sein. Die „Reize“, bei denen das WEBERsche Gesetz von der konstanten relativen Unterschiedsempfindlichkeit zu Tage tritt, sind uns normalerweise als gemessene, numerisch ausgedrückte Gröfsen gegeben; Bequemlichkeit wie Gewohnheit bringen es aber mit sich, dafs wir Veränderungen an Zahlengröfsen und dem, was durch sie ausgedrückt ist, zunächst auf den aus diesen Veränderungen resultierenden Unterschied hin betrachten: dadurch läfst man sich verleiten, das, „um was“ eine Reizgröfse von einer anderen verschieden ist, für die Verschiedenheit dieser Gröfsen zu nehmen. Dagegen sind die zugehörigen „Empfindungen“ natürlich alles eher, als in numerisch bestimmter Weise gegeben; Verschiedenheiten, die hier auffällig werden, sind daher nichts weniger als Unterschiede. Aber es gehört für den, der bei den Reizen Unterschiede für Verschiedenheiten hält, nicht mehr eben viel dazu, nun bei den Empfindungen umgekehrt Verschiedenheiten für Unterschiede zu nehmen. Hat man nämlich z. B. beobachtet, dafs die Erhöhung eines Reizes von 4 auf 8 die nämliche Veränderung in der Empfindung hervorruft wie die Erhöhung von 8 auf 16, und hält man sich zur Charakterisierung der so am Reize vollzogenen Veränderung ausschliefslich an den „Zuwuchs“, der dabei im zweiten Falle natürlich beträchtlich gröfser ist als im ersten Falle, so liegt es nahe genug, nun auch das, was in

[1] Es ist das Verdienst J. MERKELS, nun auch die Gegner der logarithmischen Funktion mit einem Argumente versehen zu haben, das einige Volkstümlichkeit verspricht, ich meine seinen Hinweis darauf, dafs, damit die Empfindung auf das Doppelte steige, der Reiz nach der Formel FECHNERS um das Tausendfache (nach CHR. WIENERS Modifikation der Formel sogar um das Zehntausendfache) steigen müfste (*Philos. Stud.* Bd. X. S. 148 f.). Für die Theorie der Vergleichung aber bietet die, wie mir scheint, wirklich jedem Unvoreingenommenen sich aufdrängende „Unbegreiflichkeit“ solcher Zahlen einen Beitrag zu der wiederholt berührten Angelegenheit des zahlenmäfsigen Ausdruckes oder Quasi-Ausdruckes von Verschiedenheitsgröfsen.

den beiden Fällen auf der Empfindungsseite sich in übereinstimmender Weise zugetragen hat, für einen, natürlich gleichen, „Zuwuchs" anzusehen, selbst auf die Gefahr hin, daſs die Natur des betreffenden Inhaltes den Gedanken eines Zuwuchses zum Ungedanken macht. Zusammenfassend also: die Verkennung des Parallelismus in der Veränderung der Reize und der zugehörigen Empfindungen ist dadurch veranlaſst, daſs man bei den numerisch ausgedrückten Reizen über dem Unterschiede die Verschiedenheit auſser acht läſst, oder gar die Verschiedenheit nach dem Unterschiede taxiert, — bei den nicht numerisch ausgedrückten Empfindungen dagegen die Verschiedenheit fälschlich für einen Unterschied nimmt, und vielleicht gar aus solchen „Unterschieden" das Ganze einer absoluten Empfindungsintensität aufzubauen unternimmt. Es ist also neuerlich das mangelhafte Auseinanderhalten von Unterschied und Verschiedenheit, was, nachdem es in der Ableitung der Logarithmenformel eine wesentliche Rolle gespielt hat, dem ganzen Theorem gewissermaſsen auch schon von auſsen her den Anschein der Triftigkeit verleiht.

Den Knoten, der durch die vorstehenden Erwägungen zu lösen versucht worden ist, unternimmt J. v. Kries mit Hülfe seines Prinzips der willkürlichen Festsetzungen zu durchhauen. Ich glaube nicht, daſs es der hier so oft angezogenen Abhandlung vom Jahre 1882 eigentlich um einen Angriff auf die psychische Messung zu thun ist: denn, was gegen oder über sie vorgebracht wird, wird ja auch auf alle anderen Intensitätsmessungen bezogen,[1] und sofern hierin anerkannt ist, daſs Empfindungen nicht anders meſsbar sind als etwa Geschwindigkeit, mechanische Arbeit, Stärke des galvanischen Stromes u. dgl., so könnte auch der extremste Vorkämpfer messender Psychologie nicht wohl mehr verlangen. Vielmehr gipfeln Kries' Ausführungen in der Behauptung, „daſs der ganze Streit über die Gesetze der Abhängigkeit der Empfindung vom Reize gar keinen Sinn hat".[2] Je nachdem wir eben merkliche „Empfindungszuwüchse" oder solche als gleich „festsetzen", die gleichen Reizzuwüchsen entsprechen, können wir den Empfindungen ein „Wachstum" proportional dem Logarithmus des Reizes oder ein-

[1] Vergl. a. a. O. besonders S. 275 f., 285.
[2] A. a. O. S. 276.

fach proportional dem Reize zuschreiben. „Eines ist so richtig wie das andere. Es kann sich nur um die Frage handeln, was zweckmäfsiger ist.“ [1] Dafs auch ich von zwei Festsetzungen über „Empfindungszuwüchse“ keiner den Vorzug zu geben vermöchte, darf nach Früherem nun für selbstverständlich gelten, natürlich aber in der Weise, dafs eben beliebige Determinationen eines unannehmbaren Begriffes die Unannehmbarkeit mit diesem teilen müssen. Konsequenzen aus solchen Determinationen könnten als solche höchstens gleich falsch, keinesfalls aber gleich richtig sein. Denkt man aber, wie dies doch wohl auch KRIES thun dürfte,[2] an „Wachstum“ der Empfindung im natürlichen Sinne einer Veränderung in bestimmter Richtung, hält man den Ungedanken des „Empfindungszuwuchses“ also fern, dann ist die Stellungnahme gegen KRIES' These durch die im Hinblick hierauf schon im zweiten Abschnitte[3] geführten Untersuchungen über die Bedingungen des Vergleichens vorgegeben. Über Gleichheit und Verschiedenheit sowie über die Gröfse der letzteren läfst sich nichts „festsetzen“; der Streit ist ein sachlicher, und kein „auf Mifsverständnissen beruhender Streit um Worte“[4] und die Entscheidung in diesem Streite mufs, wenn die vorstehenden Untersuchungen einwurfsfrei sind, und insoweit das WEBERsche Gesetz Geltung hat, gegen die FECHNERsche Formel und zu Gunsten einer Präsumtion für Proportionalität oder Quasi-Proportionalität ausfallen.

§ 31. Die Logarithmenformel für die Messung von Gröfsenverschiedenheiten.

Sollte nun aber damit die herkömmliche, oben[5] nur in etwas veränderter Form wiedergegebene Ableitung der logarithmischen Funktion aus dem WEBERschen Gesetze allen Wert verloren haben? Mir scheint dies so wenig der Fall, dafs ich vielmehr in dem, was bei richtiger Interpretation und angemessener Weiterführung jener Ableitung zu Tage kommt, einen wesentlichen Teil der wahren Bedeutung des WEBERschen Gesetzes erblicken mufs. Es ist hier der Ort, zugleich auf die im vierten

[1] A. a. O.
[2] Vergl. die Zusammenfassung S. 294.
[3] Oben § 6 ff.
[4] A. a. O. S. 294.
[5] Vergl. § 29.

Abschnitt unvollendet gelassene Untersuchung zurückzukommen, welche die Messung der Verschiedenheitsgröfse auf Grund der in Verschiedenheitsrelation stehenden Gröfsen zum Gegenstande hatte. Näher stellte sich die Aufgabe heraus, die Funktion zu finden, welche diese Gröfsen zu einem angemessenen Messungssurrogate zu vereinigen im stande wäre. Arithmetisches wie geometrisches Verhältnis, desgleichen der relative Unterschied haben sich als unzureichend erwiesen; ich glaube nun, dafs wir an die oben abgeleitete logarithmische Funktion günstigere Erwartungen zu knüpfen berechtigt sind.

Dafs die in Rede stehende Ableitung uns in den Gedankenkreis der eben nochmals formulierten Aufgabe hineinführt, wird dem Leser der vorangehenden Ausführungen ohnehin längst klar geworden sein. Es wurde ja ausdrücklich bereits der Möglichkeit gedacht, die oben zwischen die e gestellten Minuszeichen als Verschiedenheitszeichen zu verstehen. Wie nun schon wiederholt berührt, gelangen wir dadurch zu der einzig korrekten Auffassung des WEBERschen Gesetzes von der Konstanz der relativen Unterschiedsempfindlichkeit. Wir wollen uns nun an diese Auffassung wieder ganz ausschliefslich halten, aufserdem derselben aber durch Rückkehr zu der früher verwendeten Symbolik einen weniger mifsverständlichen Ausdruck geben, als durch Umdeutung eines der Mathematik geläufigen Zeichens in Verbindung mit gleichzeitig vorzunehmenden Rechnungsoperationen zu erzielen wäre. Statt $e_1 - e_2$ haben wir demgemäfs ${}_{e_1}V_{e_2}$ zu schreiben. Ferner trete an Stelle des Empfindungsdifferenzsymboles ε das Verschiedenheitsgröfsensymbol v, übrigens, wie sich sofort zeigen wird, für das Folgende nur von ganz vorübergehender Bedeutung.

Die nächste Folge dieser Modifikationen in der Symbolik ist die, dafs wir statt Gleichungen von der Form $e_2 - e_1 = \varepsilon$ Ausdrücke von der Form ${}_{e_2}V_{e_1} = v$ erhalten, aus denen freilich nicht mehr zu entnehmen ist, als dafs die betreffende Verschiedenheit eine Gröfse, eben die Gröfse v hat, — eine an sich nicht eben vielsagende These, deren Bedeutung aber doch in ein anderes Licht tritt, wenn nach Analogie des oben[1] eingeschlagenen Verfahrens eine ganze Reihe von Verschiedenheiten neben einander gestellt werden kann, denen allen, eben auf

[1] Vergl. S. 127 f.

Grund des WEBERschen Gesetzes, die gleiche Gröſse v zukommt. Dürfen wir schlieſslich die in früheren Zusammenhängen wiederholt berührte Annahme machen, daſs Distanzen im Hinblick auf die zugeordneten Strecken addierbar sind, so steht einer Übertragung der oben an den psychischen und physischen Daten vorgenommenen Operationen kein Hindernis mehr im Wege, und wir gelangen statt zu der Formel I) zu der Gleichung:

$$_{e_n}V_{e_1} = (\log r_n - \log r_1)\frac{v}{\log \varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{Ia}),$$

die, soweit ich sehen kann, allen billigen Anforderungen an Strenge Genüge leistet. Nun gilt aber auch der oben in betreff der Konstanz des Bruchfaktors geführte Nachweis nicht minder für die modifizierte Sachlage. Führen wir daher unter dem Symbol r_p einen beliebigen neuen Reiz desselben Gebietes ein, so gilt unter analoger Anwendung des Symbols $_{e_p}V_{e_1}$ die Proportion:

$$_{e_n}V_{e_1} : {}_{e_p}V_{e_1} = (\log r_n - \log r_1) : (\log r_p - \log r_1)$$

oder, falls wir, wieder wie oben, unter r_1 die Reizeinheit verstehen:

$$_{e_n}V_{e_1} : {}_{e_p}V_{e_1} = \log r_n : \log r_p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{III}).$$

In Worten: die Gröſsenverschiedenheiten zweier Empfindungen (oder Quasi-Empfindungen) von der zur Reizeinheit gehörigen Empfindung verhalten sich wie die Logarithmen der beiden zugehörigen Reizzahlen. Unter derselben Voraussetzung in Bezug auf r_1 hätten wir auch sogleich aus Ia) den kürzeren Ausdruck folgern können:

$$_{e_n}V_{e_1} = C \log r_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{IIa}),$$

d. h. die Logarithmenformel, durch welche man die Beziehung zwischen Reiz und Empfindung auszudrücken versucht hat, betrifft in Wahrheit die Beziehung zwischen Reiz- und Empfindungsdistanz, näher Distanz der zum Reiz gehörigen Empfindung von der Reizeinheitsempfindung, wenn dieses Wort hier vorübergehend gestattet ist.

Um nun aber absolute Maſszahlen für die Verschiedenheitsgröſsen [illegible] ...n wir vor allem über die dabei zu

Grunde zu legende Einheit eine Vereinbarung treffen. Behandeln wir als Distanzeinheit die Verschiedenheit der zum Reize r_p gehörigen von der zur Reizeinheit gehörigen Empfindung, setzen wir also

$$_{e_p}V_{e_1} = 1\,,$$

so folgt unmittelbar aus III:

$$_{e_n}V_{e_1} = \frac{\log r_n}{\log r_p}.$$

Da die Wahl der Einheit frei ist, so kann mindestens kein Fehler begangen sein, wenn wir, ohne dadurch künftig etwa sich einstellenden Bedürfnissen ihr Recht abzusprechen, einstweilen dem die Verschiedenheitseinheit von der einen Seite her bestimmenden r_p den Wert 2 erteilen, die Verschiedenheitsgröfsen also nach der Distanz bestimmen, welche zwischen der durch den Reiz 2 und der durch den Reiz 1 hervorgerufenen Empfindung besteht. Kürzer, freilich auch undeutlicher, jedoch in Analogie zum sonstigen Sprachgebrauche, könnte man auch sagen: die Distanz zwischen der 2-Empfindung und der 1-Empfindung, oder gar: die Distanz zwischen 2 und 1, nur dafs damit keineswegs etwa die Zahlengröfsen gemeint sein wollen. Setzen wir also:

$$r_p = 2,$$

so erhalten wir nun einfach:

$$_{e_n}V_{e_1} = \frac{\log r_n}{\log 2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{IV}).$$

Wie man sieht, leidet diese Distanzbestimmung gleich den vorhergegangenen an dem Mangel, dafs ihr in betreff des einen der beiden distanten Objekte die Allgemeinheit fehlt, indem der Reizeinheitsempfindung immer noch ein wesentlicher Anteil gewahrt bleibt. Dieser Mangel ist unter neuerlicher Anwendung des Prinzips der Addierbarkeit der Distanzen leicht zu beseitigen. Es seien ganz allgemein zwei Reize desselben Gebietes, r_a und r_b gegeben, wo

$$r_b > r_a$$

angenommen werde. Denken wir überdies beide gröfser als 1, so folgt aus dem Prinzipe der Summierbarkeit:

$$_{e_b}V_{e_1} - {_{e_a}V_{e_1}} = {_{e_b}V_{e_a}}.$$

Nach IV) ist nun:

$$_{e_b}V_{e_1} = \frac{\log r_b}{\log 2},$$

ebenso:

$$_{e_a}V_{e_1} = \frac{\log r_a}{\log 2},$$

daher:

$$_{e_b}V_{e_a} = \frac{\log r_b - \log r_a}{\log 2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{V)}.$$

In Worten: Die Gröſsenverschiedenheit zweier Empfindungen geht proportional der Differenz der Logarithmen ihrer Reize; sie ist gleich dieser Differenz dividiert durch den Logarithmus von 2, falls man sie in Einheiten miſst, welche der Verschiedenheit des zum Reize 2 gehörigen Inhaltes von den zum Reize 1 gehörigen gleich sind.

FECHNERS „Unterschiedsformel"[1] hätte in unseren Symbolen die Gestalt:

$$e_b - e_a = k\,(\log r_b - \log r_a),$$

wo k eine Konstante bedeutet. Wie man sieht, kommt ihr der eben sub V) gewonnene Ausdruck sehr nahe; was er vor ihr voraus hat, möchte weniger die Bestimmung der Konstanten k, als — ich hoffe es wenigstens — die Art und Weise der Ableitung sein. FECHNERS Formel ist eben, wie man auf den ersten Blick erkennt, wirklich eine „Unterschieds"-Formel; wir wissen aber, wie es um „Unterschiede" zwischen Empfindungen und um die Identifizierung von Unterschied und Verschiedenheit steht.

Daſs wir auch in V) eine Logarithmenformel vor uns haben, verdient mit Rücksicht auf die Untersuchungen des vorigen Abschnittes besonders hervorgehoben zu werden. Was FECHNER bereits zu Gunsten seiner Maſsformel als besonderen Vorzug der logarithmischen Funktion geltend gemacht hat,[2] kommt mit dieser auch dem Ausdrucke V) zu: dem, wie wir sahen, vielleicht nicht a priori selbstverständlichen, jedenfalls aber mindestens in hohem Grade plausiblen Prinzip der Summier-

[1] Vergl. *Elemente*, Bd. II. S. 89.
[2] *Elemente*, Bd. II. S. 87 f.

barkeit der Distanzen[1] ist durch die gewonnene Formel in vollem Maſse Rechnung getragen.

Das Ergebnis der eben durchgeführten Untersuchung ist nicht geradezu die Antwort auf die im vierten Abschnitte aufgeworfene und oben neuerdings erhobene Frage; denn diese betraf die Bestimmung der Verschiedenheitsgröſse auf Grund der distanten Objekte selbst, während wir hier die Empfindungsverschiedenheit mit Hülfe der Reizgröſsen zum Ausdrucke brachten. Indes dürften wir weder vom theoretischen, noch vom praktischen Interessenstandpunkte aus Anlaſs haben, den Gang zu beklagen, den hier die Untersuchung genommen hat, da wir darin theoretisch wie praktisch ein Superplus zu verzeichnen haben. Praktisch vor allem kann es nur ein Gewinn sein, wenn wir die Verschiedenheit psychischer Gröſsen durch physische Gröſsen bestimmen lernen, deren Maſszahlen uns zugänglich sind, anstatt durch psychische Gröſsen, deren Maſszahlen uns unzugänglich sind. Praktisch und theoretisch fällt der Vorzug von Formeln ins Gewicht, deren Anwendungsgebiet sich nicht bloſs auf Verschiedenheiten teilbarer Gröſsen beschränkt: vorgestellte Intensitäten sind, wie wir wissen, eigentlichen Maſszahlen gar nicht zugänglich, während eine auf die Reize gegründete Verschiedenheitsmessung keineswegs vor ähnliche Schranken gerät. Schlieſslich aber enthält, wenn ich recht sehe, Formel V) auch die ganz direkte Antwort auf die in Rede stehende Frage in sich.

Freilich nur unter der vorgängig nächstliegenden und, wie wir sahen, durch das WEBERsche Gesetz verifizierten Voraussetzung der Proportionalität der betreffenden physischen und psychischen Daten. Sind nämlich die r und die zugehörigen e, soweit es die Natur der letzteren gestattet, proportional, so folgt, da proportionale Gröſsenpaare gleiche Logarithmendifferenzen aufweisen müssen, aus V) unmittelbar:

$$ {}_{e_b}V_{e_a} = \frac{\log e_b - \log e_a}{\log 2} \dots\dots\dots\dots \text{VI}), $$

falls in gleicher Weise wie oben die Distanz zwischen e_2 und e_1 also

$$ {}_{e_2}V_{e_1} = 1 $$

[1] Vergl. oben S. 106 ff.

gesetzt bleibt. Hier haben wir nun die direkte Antwort auf die Frage nach der Funktion, welche die distanten Gröfsen zum Surrogat für die Messung ihrer Verschiedenheit vereinigt.

Dürfen wir, was hier vom Mafse der Verschiedenheit des Psychischen dargethan wurde, auf das Mafs der Verschiedenheit des Physischen übertragen, so können wir den sub V) rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Wert nun auf die Gröfse der Verschiedenheit nicht nur der e, sondern auch der r beziehen, sonach:

$$_{r_b}V_{r_a} = \frac{\log r_b - \log r_a}{\log 2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{VII)}$$

setzen. Gar wohl enspricht auch dies der am Weberschen Gesetze hervortretenden Thatsache, dafs die Reize oder Quasi-Reize sich eben in derselben Weise gleich oder verschieden zeigen wie die zugehörigen Empfindungen oder Quasi-Empfindungen.

§ 32. Verhältnishypothese und Unterschiedshypothese.

Ohne Zweifel haben die im Bisherigen niedergelegten Untersuchungen ihren negativen wie ihren positiven Ergebnissen nach in mehr als einem Punkte an jene Interpretation des Weberschen Gesetzes gemahnt, für welche Fechner etwa fünfzehn Jahre nach ihrem ersten Auftreten im Gegensatze zu seiner eigenen Auffassung als der „Unterschiedshypothese“ die Bezeichnung „Verhältnishypothese“ eingeführt hat.[1] Die Wichtigkeit und Verbreitung dieser Ansicht macht eine ausdrückliche Stellungnahme ihr gegenüber unerläfslich, wenn auch zu erwarten ist, dafs die Konsequenzen in betreff derselben aus dem bisher Festgestellten unschwer zu ziehen sein werden.

Bekanntlich ist es für diese Auffassung charakteristisch, den Gedanken des relativen Unterschiedes, den die Unterschiedshypothese nur den Reizen gegenüber anwendet, auch auf dem Gebiete der zugehörigen Empfindungen zur Geltung zu bringen, näher, die in den Thatsachen des Weberschen Gesetzes gegebene Regelmäfsigkeit so zu verstehen, dafs gleichen rela-

[1] In Bd. IV von *Wundts Philos. Stud.* S. 174.

tiven Reizunterschieden nicht, wie zunächst selbstverständlich scheinen mag, aber in Wahrheit eben die Voraussetzung einer besonderen Hypothese (der Unterschiedshypothese) ist, gleiche absolute, sondern gleiche relative Empfindungsunterschiede entsprechen. Dafs diese Annahme ein „nicht minder gut in sich zusammenstimmendes System von Mafsformeln" gestattet, wie die Unterschiedshypothese, hat FECHNER anerkannt[1] und durch Ableitung dieser Formeln erhärtet.[2] Vielleicht ist es aber nicht ohne Interesse, dafs der im Sinne der Verhältnishypothese der FECHNERschen „Mafsformel" entsprechende und gleich dieser allen weiteren Entwickelungen zu Grunde zu legende Ausdruck sich auch hier ohne Differentiation und Integration gewinnen läfst.

Lassen wir nämlich in der oben[3] angenommenen Reizreihe mit dem konstanten Quotienten ϱ eine Empfindungsreihe nicht von konstanter Differenz ε, sondern eine von gleichfalls konstantem Quotienten entsprechen, für welchen das Symbol η in Anwendung komme, so erhalten wir durch Multiplikation bezüglich:

$$\frac{r_n}{r_1} = \varrho^{n-1} \text{ und } \frac{e_n}{e_1} = \eta^{n-1},$$

ferner wieder durch Gleichsetzung der beiden hieraus zu berechnenden Werte von $n - 1$:

$$\frac{\log e_n - \log e_1}{\log \eta} = \frac{\log r_n - \log r_1}{\log \varrho},$$

daher:

$$\log e_n - \log e_1 = (\log r_n - \log r_1)\frac{\log \eta}{\log \varrho} \dots\dots\dots \text{I}).$$

Im Hinblick auf die seiner Zeit dargelegten Gründe[4] ist auch hier der Bruchfaktor rechts vom Gleichheitszeichen konstant; setzen wir daher

$$\frac{\log \eta}{\log \varrho} = k,$$

---

[1] A. a. O. S. 175.

[2] A. a. O. S 178 f., vergl. auch „*In Sachen*" S. 24 f.

[3] Vergl. § 29.

[4] Vergl. oben S. 128 ff.

wo k eine Konstante bedeutet, — erteilen wir ferner dem e_1 den Wert der Einheit, auf die sämtliche e als Maſszahlen bezogen zu denken sind, und bezeichnen wir den Wert, den r_1 in diesem Falle annimmt, mit q, so erhält I) die Gestalt:

$$\log e_n = k \log \frac{r_n}{q},$$

daher:

$$e_n = \left(\frac{r_n}{q}\right)^k = \frac{1}{q^k} r_n^k.$$

Weil aber den obigen Annahmen gemäſs auch q konstant ist, so können wir

$$\frac{1}{q^k} = C$$

setzen und erhalten so:

$$e_n = C r_n^k,$$

was dem von FECHNER abgeleiteten Analogon zur Maſsformel entspricht. Nur hat, was eben ohne nähere Vorbestimmung über die Beschaffenheit der Empfindungseinheit als Wert des dieser zugehörigen Reizes mit q bezeichnet worden ist, bei FECHNER den speziellen Wert der Reizschwelle. Vom rein rechnerischen Standpunkte ist dagegen auch schwerlich etwas einzuwenden; interpretiert man aber die Schwelle als Empfindungsnull, dann wäre freilich, gerade diesen Wert zum Einheitswerte machen zu wollen, besonders bedenklich und jeder andere vorzuziehen.

Da es indes geeigneterer Werte genug giebt, so begründet dieser Hinweis auf die Thatsache der Schwelle auch nicht etwa einen Einwand gegen die Verhältnishypothese; immerhin aber ist ein anderer Hinweis auf diese Thatsache im Grunde das einzige Greifbare, worauf FECHNER selbst den Vorzug der Unterschieds- vor der Verhältnishypothese zu begründen unternimmt.[1] Während nämlich die Unterschiedshypothese den Fall der Reizschwelle ohne weiteres als Spezialfall in sich begreift,[2]

---

[1] *Philos. Stud.* IV. S. 176, übrigens schon gegen PLATEAU berührt, vergl. *In Sachen*. S. 23.

[2] Genauer müſste man freilich sagen: eine Voraussetzung der „Maſsformel" ausmacht; vergl. *Elemente*. Bd. II. S. 34.

steht die Verhältnishypothese dieser Thatsache völlig fremd gegenüber. Allein so wenig der hieraus der Unterschiedshypothese erwachsende Vorteil die Mängel wett machen kann, die uns oben zum Aufgeben dieser Auffassung hindrängten, so wenig kann der jenem Vorteil korrelative Nachteil die Verhältnishypothese etwa kurzweg unannehmbar machen. Auch wird man den Nachteil um so niedriger einschätzen, je gröſsere Bedeutung für die Schwellenthatsachen man dem Urteile, genauer der beschränkten Urteilsfähigkeit einräumen zu müssen meint, vom Gewinn gar nicht zu reden, der unzweifelhaft darin liegen muſs, zugleich der Sorge um die „negativen Empfindungswerte“ überhoben zu sein.

Natürlich kommt es nun aber vor allem darauf an, was denn eigentlich zu Gunsten dieser Hypothese spricht. Mit besonderem Nachdruck findet man sich zum Zwecke der Beantwortung dieser Frage darauf verwiesen, daſs die in Rede stehende Hypothese als ein spezieller Fall des „allgemeinen Gesetzes der Relativität“ zu betrachten sei,[1] und es bedeutet dies die Berufung auf eine höchst weitläufige Sache, der wirklich näher zu treten an diesem Orte nicht wohl versucht werden kann. Aber vielleicht habe ich mir einiges Anrecht erworben, in Angelegenheit der „Relationen“ — mit diesen wird die „Relativität“ doch wohl zu thun haben — einmal meine Meinung auch in einem Falle rund auszusprechen, wo ich auf eine ausreichende Rechtfertigung derselben verzichten muſs. SCHOPENHAUER sagt einmal von dem Worte „Wechselwirkung“, man könne es „als eine Art Allarmkanone betrachten . . ., welche anzeigt, daſs man ins Bodenlose geraten sei“.[2] Ohne natürlich gegen den Begriff der Relativität etwa in ähnlicher Weise prinzipielle Einwendungen erheben zu wollen, wie SCHOPENHAUER gegenüber dem Begriffe der Wechselwirkung thut, bin ich doch der Meinung, daſs die Funktion der „Allarmkanone“ auch dem Worte „Relativität“ unbedenklich zuzuerkennen ist. Ein günstiges Vorurteil hat dann eine Ableitung aus einem „Relativitätsgesetze“ freilich nicht zu gewärtigen, und wenn ich recht sehe, überzeugt man sich leicht

---

[1] Vergl. insbesondere GROTENFELT, a. a. O. S. 76 ff.

[2] *Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde.* § 20, ed. Frauenstädt. S. 42.

genug, dafs wenigstens in dem uns hier beschäftigenden Falle das Vorurteil im Rechte bleibt.

Was besagt vor allem dieses vielberufene „Gesetz"? GROTENFELT benutzt zur Formulierung desselben den Ausspruch HERINGS,[1] „dafs es, wie in der ganzen Welt überhaupt, so auch in der Welt des psychischen Geschehens immer nur auf Verhältnisse ankommen kann, weil es ein absolutes Mafs der Dinge nicht giebt."[2] Wer hier bei der auch von WUNDT mehr als einmal gebrauchten[3] Wendung vom absoluten und relativen Mafs etwa an die oben im dritten Abschnitt geführten Untersuchungen, also an das Messen im genauen Wortsinne denkt, weifs mit der ausdrücklichen Bestreitung eines „absoluten Mafses", das natürlich eine Contradictio in adjecto wäre, schlechterdings nichts anzufangen.[4] Metaphorisch verstanden betrifft dagegen der Ausdruck offenbar das, was man auch „Relativität der Empfindung" genannt hat, eine Ansicht, die durch STUMPFS kritische Bemerkungen[5] bereits in ausreichend helles Licht gesetzt sein möchte. Was nun aber vor allem jene „Verhältnisse" anlangt, so schafft ihre zweifellose Bedeutung für das psychische Leben freilich ein günstiges Präjudiz für eine „Verhältnis"-Hypothese, falls jedesmal mit „Verhältnis" das Nämliche gemeint ist. Inzwischen kann in einem „allgemeinen" Relativitätsgesetz „Verhältnis" nur soviel als „Relation" im allgemeinen heifsen; und eine „Relation" besteht nicht nur zwischen Dividend und Divisor, sondern auch zwischen Minuend und Subtrahend.[6] Warum sollte also das

---

[1] Nur hat es der vielbewährten Strenge dieses Forschers sicher fern gelegen, eine gelegentlich gemachte allgemeine Bemerkung zum Range eines Fundamentalgesetzes erheben zu wollen. Darum richten sich meine polemischen Bemerkungen über das „Relativitätsgesetz" an GROTENFELT und sonstige Vertreter dieses Gesetzes, nicht aber an HERING.

[2] A. a. O. S. 76.

[3] Z. B. *Physiol. Psychol.* 4. Aufl. Bd. I. S. 393.

[4] An den oben S. 118, Anmerkung 1, berührten Sinn, in dem LIPPS diesen Ausdruck gebraucht, ist hier natürlich in keiner Weise zu denken.

[5] *Tonpsychol.* Bd. I. S. 7 ff. Es ist auch sonst zu bedauern, dafs die gerade in Bezug auf Litteraturberücksichtigung so viel Fleifs bekundende Arbeit GROTENFELTS von einer Bekanntschaft mit diesem wichtigen Buche keine Spur aufweist.

[6] Läfst doch selbst der mathematisch-technische Gebrauch des Wortes „Verhältnis" die Disjunktion zwischen arithmetisch und geometrisch offen.

„Relativitätsgesetz“ nicht auch der Unterschiedshypothese zu statten kommen? Man müfste demnach, den Boden eines „allgemeinen“ Relativitätsgesetzes bereits verlassend, für ein Gesetz eintreten, das es ganz speziell mit den „Verhältnissen“ im engeren Sinne zu thun hat; für ein solches scheinen aber wenigstens die von GROTENFELT[1] beigebrachten Instanzen nicht eben überzeugend, zumal es zu Gunsten der Verhältnishypothese doch vor allem darauf ankäme, darzuthun, dafs die „Verhältnisse“ nicht etwa nur an den Reizen, sondern aufserdem auch noch an den Empfindungen (das Wort wieder, wie oben schon öfter, ungenau, d. h. zu weit verstanden) zur Geltung kommen.

Detailkritik hätte hier ohne Zweifel noch gar manches zu berühren; es scheint mir indes entbehrlich aus zwei Gründen von eigentlich ziemlich entgegengesetzter Tendenz. Einmal nämlich setzen uns die im Vorhergehenden durchgeführten Untersuchungen ohne weiteres in den Stand, die Unhaltbarkeit der Verhältnishypothese gerade in Bezug auf dasjenige einzusehen, was sich ex definitione als ihr eigentliches charakteristisches Moment darstellt. Es kommt ja auch hier auf die schon so oft berührte Substitution des Unterschiedes an Stelle der Verschiedenheit hinaus. Auch der „relative Unterschied“, auf den unsere Hypothese so viel Gewicht legt, ist ein Unterschied; und kann es bei den Empfindungen, soweit sie „intensive Gröfsen“, d. h. unteilbare Gröfsen sind, keine absoluten Unterschiede geben, so relative erst recht nicht, da hier zur Subtraktion noch die Division hinzutritt. Natürlich genügt aber auch der Hinweis auf die Division für sich allein, was hier nur deshalb ausdrücklich in Erinnerung gebracht wird, weil das „Verhältnis“, das geometrische nämlich, mit dem relativen Unterschied zwar zusammengeht, aber nicht zusammenfällt.

Andererseits aber möchte es doch auch nicht angemessen sein, durch allzu langes Verweilen bei mehr oder weniger zufälligen Mängeln in der Formulierung und Begründung die Thatsache zu verdunkeln, dafs an der sogenannten Verhältnishypothese das, was eben zuvor das sie ex definitione zunächst charakterisierende Moment genannt wurde, im Grunde gar nicht die Hauptsache ist. Es ist kaum zufällig, dafs es erst FECHNER

[1] A. a. O. S. 79 ff.

selbst war, der ihr den Namen wie die mathematische Präzisierung geben mufste; denn wesentlich war Denjenigen, die sich mehr oder minder ausdrücklich zu ihr bekannt haben, am Ende doch nicht das „Verhältnis“, sondern die Opposition gegen FECHNERS Logarithmengesetz oder eigentlich die vielleicht oft mehr instinktiv als aus unangreifbaren Gründen heraus gewonnene Überzeugung, dafs FECHNERS Interpretation der Thatsachen des WEBERschen Gesetzes unbeschadet der Genialität ihres Urhebers auf einer fundamentalen Unnatürlichkeit oder Widernatürlichkeit beruhen müsse.

In ganz besonderem Mafse scheint mir dies den bereits an früherer Stelle berührten Ausführungen BRENTANOS[1] gegenüber deutlich zu werden. Zwar sind diese, wenn das im zweiten Abschnitte[2] über Merklichkeit Gesagte richtig ist, dem Vorwurfe G. E. MÜLLERS,[3] einen Zirkel zu enthalten, nicht ausgesetzt. Dagegen konnte FECHNER[4] mit Recht geltend machen, dafs BRENTANO sich gegen ihn auf Thatsachen berufe, „die sonst allgemein zu Gunsten des WEBERschen Gesetzes gedeutet werden“. Aufserdem aber erwächst daraus, dafs von Merklichkeitsgraden (sogar Verwechselungschancen), Zuwuchs, Unterschied und Vielfachem der Empfindung ohne nähere Prüfung gehandelt wird, für Denjenigen, der Wortkritik üben wollte, allenthalben Gelegenheit zu begründeten Einwürfen. Dennoch ist, wie ich nicht bezweifeln kann, die Meinung die richtige; die anscheinend ganz nebensächlichen Berücksichtigungen des Ähnlichkeitsmomentes[5] beweisen dies, bei denen übrigens immer noch davon abzusehen ist, dafs eine Berufung auf Verschiedenheit statt auf Ähnlichkeit das eigentlich Natürlichste gewesen wäre.

Auch HERINGS bekannte Mitteilung „Über FECHNERS psychophysisches Gesetz“[6] darf hier nicht unerwähnt bleiben, weil es vielleicht erst auf Grund der vorstehenden Untersuchungen möglich geworden ist, die von HERING eingenommene Position

---

[1] *Psychologie*. Bd. I. S. 88 f.

[2] Vergl. oben § 10.

[3] *Zur Grundlegung*. S. 388.

[4] *In Sachen*. S. 25. Vergl. auch G. E. Müller, *Zur Grundlegung*. S. 387.

[5] Vergl. oben S. 86.

[6] „Zur Lehre von der Beziehung zwischen Leib und Seele.“ *Sitzgs-Ber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien*. Math.-naturw. Kl. LXXII. Bd., III. Abteilung. 1876.

gebührend zu würdigen. Die genannte Schrift wendet sich in erster Linie gegen das vom Standpunkte der Unterschiedshypothese ganz korrekt formulierte Prinzip, daſs zu gleichen Reizverhältnissen gleiche Empfindungszuwüchse gehören. Hält man hier den Gedanken des „Zuwuchses" fest, so muſs man einräumen, daſs HERINGS Beispiel vom gleichmerklichen Zuwuchs zu einer kurzen und einer langen Raumstrecke oder das Argument von der logarithmischen Verzerrung voraussetzungsgemäſs geometrisch ähnlicher Figuren[1] die Ungültigkeit jenes Prinzips für das Gebiet der extensiven Quasi-Empfindungen schlagend dargethan hat.[2] Von dem Gebiete aber, wo es solche „Zuwüchse" giebt, überträgt HERING seine Beweisführung auf das Gebiet der eigentlichen („intensiven") Empfindungen, wo es, wie wir wissen, solche Zuwüchse nicht giebt. Für die Geltung des zu bekämpfenden Prinzips ist diese Unmöglichkeit sicher kein Vorteil; indem aber HERING den Begriff des Empfindungszuwuchses selbst unangefochten läſst, bezieht man hier seinen Angriff nicht auf etwas, was es auf diesem Gebiete nicht giebt, sondern auf etwas, was es giebt, nämlich die Empfindungsverschiedenheit, und interpretiert daraufhin auch die Argumente des extensiven Gebietes von Zuwuchs auf Verschiedenheit um, wozu der Terminus „Unterschied" in seiner üblichen Unbestimmtheit noch gute Dienste leistet. Für Verschiedenheit aber sind die für Zuwuchs ganz unangreifbaren Instanzen untriftig,[3] und der Vertreter der Logarithmenformel hat, indem er dies einsieht, zugleich den guten Glauben, die HERINGschen Einwände überwunden zu haben. Dennoch sind diese ihrer Intention nach vollkommen unanfechtbar, und der in ihnen vertretenen Wahrheit haftet eigentlich kein anderer Mangel an als der, noch nicht die ganze Wahrheit zu sein.

Wie man sieht, hat es also einen ganz guten Sinn, von der Verhältnishypothese zu behaupten, daſs sie trotz der oben geltend gemachten Mängel den Hauptergebnissen unserer Feststellungen gegenüber im Rechte geblieben ist; und der Formel,

---

[1] A. a. O. S. 321 f.

[2] Gegen G. E. MÜLLER *„Zur Grundlegung"*. S. 392 f.

[3] Sie scheinen mir darum auch ganz auſser stande, EXNERS Annahme einer mit der Intensitätsänderung konkomitierenden Qualitätsänderung (*Entwurf zu einer physiologischen Erklärung der psychischen Erscheinungen.* Teil I. Wien 1894. S. 175 f.) eine Stütze zu gewähren.

durch die sie FECHNERS Maſsformel ersetzt, wird man trotz aller prinzipiellen Bedenken das Zeugnis nicht versagen können, daſs sie der Wahrheit jedenfalls näher steht als diese Maſsformel. Es tritt dies in denjenigen Fällen hervor, wo der oben geltend gemachte Haupteinwand deshalb keine Anwendung hat, weil die (Quasi-) Empfindungen teilbare (psychische) Gröſsen sind, bei denen also absolute und relative Unterschiede ganz wohl statuiert werden können. Denn entsprechen, wie sich oben ergeben hat,[1] gleich verschiedenen Reizen auch normalerweise gleich verschiedene Empfindungen, dann führt der fundamentale mathematische Ausdruck der Verhältnishypothese für je zwei Empfindungen auf einen Wert, der zwar, wie der vierte Abschnitt ergeben hat, nicht der Gröſse ihrer Verschiedenheit gleich, aber doch der Gröſse dieser Verschiedenheit wenigstens unveränderlich zugeordnet bleibt. Die auf die Voraussetzungen dieser Hypothese gegründete Maſsformel aber enthält die dann zunächst wahrscheinliche Proportionalität zwischen Reiz und Empfindung wenigstens als einfache Spezialisierung in sich.

Daſs sogar die Berufung auf das „allgemeine Relativitätsgesetz", dem oben nicht viel Gutes nachgesagt werden konnte, doch auch eine Seite hat, welche auf volle Zustimmung Anspruch machen kann, soll unten zur Sprache kommen.

§ 33.
Spezielles zu J. MERKELS Vertretung der Verhältnishypothese. Überblick über die maſsgebenden Momente.

Kann ich dem Dargelegten gemäſs nicht anders, als im Streite für und wider die Logarithmenfunktion zwischen Reiz und Empfindung mich auf die Seite der Verhältnishypothese stellen, so hat es immerhin etwas von einem seltsamen Zusammentreffen an sich, daſs es ein Vertreter der nämlichen Verhältnishypothese ist, dessen Feststellungen, wie seiner Zeit berührt,[2] das Thatsachenmaterial beigebracht haben, das allein sich dem Grundgedanken meiner Stellungnahme gegen FECHNERS Maſsformel nicht von selbst, d. h. nicht ohne Hülfshypothesen, unterordnet. Jedenfalls empfiehlt es sich aber unter solchen

[1] Vergl. § 28.
[2] Vergl. oben § 20.

Umständen, hier der charakteristischen Momente an J. MERKELS Position noch ausdrücklich zu gedenken und ihnen kurz die Gesichtspunkte entgenzuhalten, in denen ich die Entscheidung zu Gunsten des von mir eingenommenen Standpunktes zu finden gemeint habe.

Zu diesem Ende ist es, da man es hier doch nicht mit einer ganz unverwickelten theoretischen Sachlage zu thun hat, erforderlich, übrigens am Ende der gegenwärtigen Untersuchungen auch sonst am Platze, die der Theorie vorgängig gleichsam zur Verfügung stehenden Eventualitäten sich zu vergegenwärtigen. Die Gegenüberstellung von Unterschieds- und Verhältnishypothese ist bereits der Anfang hierzu, aber nicht, wie man bis MERKEL geglaubt hat, schon selbst eine vollständige Disjunktion. Während man nämlich seit der Aufstellung des WEBERschen Gesetzes immer mehr zu der Meinung gelangte, daſs, soweit es sich um die Reize handle, bei psychophysischen Gesetzmäſsigkeiten überhaupt nur der relative Unterschied Dienste leisten könne, hat MERKEL den absoluten Reizunterschied wieder zu Ehren gebracht. Schien es vorher ganz ausreichend, die verfügbaren Hypothesen nur nach dem zu bestimmen, was dem vermeintlich allein in Betracht kommenden relativen Reizunterschiede auf der Empfindungsseite gegenüberstehend angenommen wurde, so ist es nunmehr wenigstens bei einer Aufstellung der möglichen Hypothesen unerläſslich, für die Disjunktion zwischen „Unterschied“ und „Verhältnis“ auch auf der Seite der Reize Raum zu lassen. Es ergiebt sich daraus eine Vierteilung, indem folgende Hypothesen als möglich in Frage kommen:

1. Gleichem Reizverhältnis entspricht gleicher Empfindungsunterschied, — also, was man Unterschiedshypothese zu nennen pflegt, genauer Verhältnisunterschiedshypothese nennen könnte; ich will sie im Folgenden der Kürze halber als *V-U*-Hypothese bezeichnen.

2. Gleichem Reizverhältnis entspricht gleiches Empfindungsverhältnis, — die sogenannte Verhältnishypothese, genauer Verhältnisverhältnishypothese, kurz als *V-V*-Hypothese zu bezeichnen.

3. Gleichem Reizunterschied entspricht gleicher Empfindungsunterschied, — bisher unbenannt, analog als Unterschiedsunterschiedshypothese zu benennen, kurz: *U-U*-Hypothese.

gesetzt bleibt. Hier haben wir nun die direkte Antwort auf die Frage nach der Funktion, welche die distanten Gröfsen zum Surrogat für die Messung ihrer Verschiedenheit vereinigt.

Dürfen wir, was hier vom Mafse der Verschiedenheit des Psychischen dargethan wurde, auf das Mafs der Verschiedenheit des Physischen übertragen, so können wir den sub V) rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Wert nun auf die Gröfse der Verschiedenheit nicht nur der *e*, sondern auch der *r* beziehen, sonach:

$$_{r_b}V_{r_a} = \frac{\log r_b - \log r_a}{\log 2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{VII)}$$

setzen. Gar wohl enspricht auch dies der am Weberschen Gesetze hervortretenden Thatsache, dafs die Reize oder Quasi-Reize sich eben in derselben Weise gleich oder verschieden zeigen wie die zugehörigen Empfindungen oder Quasi-Empfindungen.

§ 32. Verhältnishypothese und Unterschiedshypothese.

Ohne Zweifel haben die im Bisherigen niedergelegten Untersuchungen ihren negativen wie ihren positiven Ergebnissen nach in mehr als einem Punkte an jene Interpretation des Weberschen Gesetzes gemahnt, für welche Fechner etwa fünfzehn Jahre nach ihrem ersten Auftreten im Gegensatze zu seiner eigenen Auffassung als der „Unterschiedshypothese“ die Bezeichnung „Verhältnishypothese“ eingeführt hat.[1] Die Wichtigkeit und Verbreitung dieser Ansicht macht eine ausdrückliche Stellungnahme ihr gegenüber unerläfslich, wenn auch zu erwarten ist, dafs die Konsequenzen in betreff derselben aus dem bisher Festgestellten unschwer zu ziehen sein werden.

Bekanntlich ist es für diese Auffassung charakteristisch, den Gedanken des relativen Unterschiedes, den die Unterschiedshypothese nur den Reizen gegenüber anwendet, auch auf dem Gebiete der zugehörigen Empfindungen zur Geltung zu bringen, näher, die in den Thatsachen des Weberschen Gesetzes gegebene Regelmäfsigkeit so zu verstehen, dafs gleichen rela-

[1] In Bd. IV von *Wundts Philos. Stud.* S. 174.

tiven Reizunterschieden nicht, wie zunächst selbstverständlich scheinen mag, aber in Wahrheit eben die Voraussetzung einer besonderen Hypothese (der Unterschiedshypothese) ist, gleiche absolute, sondern gleiche relative Empfindungsunterschiede entsprechen. Daſs diese Annahme ein „nicht minder gut in sich zusammenstimmendes System von Maſsformeln“ gestattet, wie die Unterschiedshypothese, hat FECHNER anerkannt[1] und durch Ableitung dieser Formeln erhärtet.[2] Vielleicht ist es aber nicht ohne Interesse, daſs der im Sinne der Verhältnishypothese der FECHNERschen „Maſsformel“ entsprechende und gleich dieser allen weiteren Entwickelungen zu Grunde zu legende Ausdruck sich auch hier ohne Differentiation und Integration gewinnen läſst.

Lassen wir nämlich in der oben[3] angenommenen Reizreihe mit dem konstanten Quotienten ϱ eine Empfindungsreihe nicht von konstanter Differenz ε, sondern eine von gleichfalls konstantem Quotienten entsprechen, für welchen das Symbol η in Anwendung komme, so erhalten wir durch Multiplikation bezüglich:

$$\frac{r_n}{r_1} = \varrho^{n-1} \text{ und } \frac{e_n}{e_1} = \eta^{n-1},$$

ferner wieder durch Gleichsetzung der beiden hieraus zu berechnenden Werte von $n-1$:

$$\frac{\log e_n - \log e_1}{\log \eta} = \frac{\log r_n - \log r_1}{\log \varrho},$$

daher:

$$\log e_n - \log e_1 = (\log r_n - \log r_1)\frac{\log \eta}{\log \varrho} \quad \ldots\ldots \text{I}.$$

Im Hinblick auf die seiner Zeit dargelegten Gründe[4] ist auch hier der Bruchfaktor rechts vom Gleichheitszeichen konstant; setzen wir daher

$$\frac{\log \eta}{\log \varrho} = k,$$

[1] A. a. O. S. 175.

[2] A. a. O. S 178 f., vergl. auch „In Sachen“ S. 24 f.

[3] Vergl. § 29.

[4] Vergl. oben S. 128 ff.

wo k eine Konstante bedeutet, — erteilen wir ferner dem e_1 den Wert der Einheit, auf die sämtliche e als Maßzahlen bezogen zu denken sind, und bezeichnen wir den Wert, den r_1 in diesem Falle annimmt, mit q, so erhält I) die Gestalt:

$$\log e_n = k \log \frac{r_n}{q},$$

daher:

$$e_n = \left(\frac{r_n}{q}\right)^k = \frac{1}{q^k} r_n^k.$$

Weil aber den obigen Annahmen gemäſs auch q konstant ist, so können wir

$$\frac{1}{q^k} = C$$

setzen und erhalten so:

$$e_n = C r_n^k,$$

was dem von FECHNER abgeleiteten Analogon zur Maſsformel entspricht. Nur hat, was eben ohne nähere Vorbestimmung über die Beschaffenheit der Empfindungseinheit als Wert des dieser zugehörigen Reizes mit q bezeichnet worden ist, bei FECHNER den speziellen Wert der Reizschwelle. Vom rein rechnerischen Standpunkte ist dagegen auch schwerlich etwas einzuwenden; interpretiert man aber die Schwelle als Empfindungsnull, dann wäre freilich, gerade diesen Wert zum Einheitswerte machen zu wollen, besonders bedenklich und jeder andere vorzuziehen.

Da es indes geeigneterer Werte genug giebt, so begründet dieser Hinweis auf die Thatsache der Schwelle auch nicht etwa einen Einwand gegen die Verhältnishypothese; immerhin aber ist ein anderer Hinweis auf diese Thatsache im Grunde das einzige Greifbare, worauf FECHNER selbst den Vorzug der Unterschieds- vor der Verhältnishypothese zu begründen unternimmt.[1] Während nämlich die Unterschiedshypothese den Fall der Reizschwelle ohne weiteres als Spezialfall in sich begreift,[2]

---

[1] *Philos. Stud.* IV. S. 176, übrigens schon gegen PLATEAU berührt, vergl. *In Sachen.* S. 23.

[2] Genauer müſste man freilich sagen: eine Voraussetzung der „Maſsformel" ausmacht; vergl. *Elemente.* Bd. II. S. 34.

steht die Verhältnishypothese dieser Thatsache völlig fremd gegenüber. Allein so wenig der hieraus der Unterschiedshypothese erwachsende Vorteil die Mängel wett machen kann, die uns oben zum Aufgeben dieser Auffassung hindrängten, so wenig kann der jenem Vorteil korrelative Nachteil die Verhältnishypothese etwa kurzweg unannehmbar machen. Auch wird man den Nachteil um so niedriger einschätzen, je gröſsere Bedeutung für die Schwellenthatsachen man dem Urteile, genauer der beschränkten Urteilsfähigkeit einräumen zu müssen meint, vom Gewinn gar nicht zu reden, der unzweifelhaft darin liegen muſs, zugleich der Sorge um die „negativen Empfindungswerte“ überhoben zu sein.

Natürlich kommt es nun aber vor allem darauf an, was denn eigentlich zu Gunsten dieser Hypothese spricht. Mit besonderem Nachdruck findet man sich zum Zwecke der Beantwortung dieser Frage darauf verwiesen, daſs die in Rede stehende Hypothese als ein spezieller Fall des „allgemeinen Gesetzes der Relativität“ zu betrachten sei,[1] und es bedeutet dies die Berufung auf eine höchst weitläufige Sache, der wirklich näher zu treten an diesem Orte nicht wohl versucht werden kann. Aber vielleicht habe ich mir einiges Anrecht erworben, in Angelegenheit der „Relationen“ — mit diesen wird die „Relativität“ doch wohl zu thun haben — einmal meine Meinung auch in einem Falle rund auszusprechen, wo ich auf eine ausreichende Rechtfertigung derselben verzichten muſs. SCHOPENHAUER sagt einmal von dem Worte „Wechselwirkung“, man könne es „als eine Art Allarmkanone betrachten . . ., welche anzeigt, daſs man ins Bodenlose geraten sei“.[2] Ohne natürlich gegen den Begriff der Relativität etwa in ähnlicher Weise prinzipielle Einwendungen erheben zu wollen, wie SCHOPENHAUER gegenüber dem Begriffe der Wechselwirkung thut, bin ich doch der Meinung, daſs die Funktion der „Allarmkanone“ auch dem Worte „Relativität“ unbedenklich zuzuerkennen ist. Ein günstiges Vorurteil hat dann eine Ableitung aus einem „Relativitätsgesetze“ freilich nicht zu gewärtigen, und wenn ich recht sehe, überzeugt man sich leicht

---

[1] Vergl. insbesondere GROTENFELT, a. a. O. S. 76 ff.

[2] *Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde.* § 20, ed. Frauenstädt. S. 42.

letzterer wären nämlich die Thatsachen II nur im Sinne der *U-V*-Hypothese zugänglich, die sich ohne Aufgeben der *V-V*-Hypothese unmöglich allgemein aufrecht erhalten läſst. Unter solchen Umständen ist die Frage nicht abzuweisen, ob die leistungsfähigere Annahme nicht am Ende doch der minder leistungsfähigen vorgezogen, ob also nicht die Verschiedenheitsannahme zu Gunsten der Differenzannahme aufgegeben zu werden verdient.

Auf den ersten Blick könnte es befremden, wie es möglich ist, durch eine Differenzannahme etwas Anderes als eine Unterschiedshypothese zu stützen. Indes kommt hierin nichts weiter als der Umstand zur Geltung, daſs, während z. B. die *V-U*-Hypothese sich auch auf Seite des Psychischen an direkte, allerdings im Sinne der Differenzannahme interpretierte Erfahrungen (von der Gleichheit der Vergleichungsergebnisse) hält, Merkel den Zusammenhang des direkt Erfahrenen mit der *V-V*-Hypothese erst durch mathemathische Erwägungen herstellen muſs. Dadurch wird aber die Frage nahegelegt, welcher Art denn dann eigentlich die direkten Erfahrungen sind, die in den beiden Ausgangsgleichungen

$$\frac{\triangle r}{r} = C \text{ und } \frac{\triangle e}{e} = c$$

ihren Ausdruck gefunden haben. Nun kann aber Merkel die Thatsachen I b (zunächst die geometrischen Mittel) seiner (Differenz-) Annahme nur unter der Voraussetzung $\varepsilon = 0$ zugänglich machen,[1] was, wie wir gesehen haben, so viel bedeutet, als daſs sie mit dieser Annahme unverträglich sind. Der Thatsachenkreis I a aber widerspricht an sich der Verhältnishypothese den direkten Erfahrungen nach durchaus nicht, um so mehr jedoch der Verhältnishypothese zusammen mit der Differenzannahme, so daſs erst, um diese aufrecht zu erhalten, jene Übereinstimmung als ein trügender, durch das Merklichkeitsmoment veranlaſster Schein erklärt werden muſs, von einer direkten Empirie zu Gunsten der Verhältnishypothese also auch hier nicht mehr die Rede sein kann. Zusammenfassend also: durch die nämliche Differenzannahme, mit deren Hülfe Merkel die Thatsachen II der Verhältnishypothese gleichsam

[1] A. a. O. S. 144 f.

zugänglich macht, verschlieſst er dieser die Thatsachen I a und I b, so daſs erstere nur durch eine, wie wir sahen,[1] nichts weniger als unbedenkliche Hülfsposition (Annahme C), letztere dagegen überhaupt nicht mit ihr in Einklang zu bringen sind. Die Verhältnishypothese ist damit ausschlieſslich auf die Erfahrungen II gestellt, und eine anderweitige Verifikation an direkter Empirie fehlt gänzlich.

Nun darf aber die Beschaffenheit der Differenzannahme selbst doch auch nicht ganz unerwogen bleiben. Besagt sie, daſs dasjenige, worüber einer urteilt, wenn er vergleicht, Unterschiede sind, so daſs das Mehr oder Weniger an dem Vergleichungsergebnis eben das Mehr oder Weniger an Unterschied ist? Ich glaube, die Gründe dargelegt zu haben,[2] die eine solche Beschreibung des Vergleichungsvorganges nicht zulassen. Kann die Annahme also wenigstens so verstanden werden, daſs zu übereinstimmenden Vergleichungsergebnissen jederzeit gleiche Unterschiede gehören? Auch diese Eventualität hat sich als unhaltbar erwiesen,[3] und zwar nicht bloſs mit Rücksicht auf die Thatsachenkreise Ia und Ib. Ich muſs also zusammenfassen: die Differenzannahme ist, abgesehen von dem, was sie als Hypothese zu leisten und nicht zu leisten im stande ist, an sich unstatthaft.

Schlieſslich muſs nun doch auch noch ein Umstand herangezogen werden, auf den bisher den Positionen Merkels gegenüber nicht Bezug genommen wurde, um sie zunächst möglichst aus sich selbst heraus zu würdigen. Wir wissen, daſs der Differenz- oder „Zuwuchs“-Gedanke keineswegs auf alle Gröſsen anwendbar ist; Merkel hat aber das arithmetische Mittel nicht nur bei Vergleichung „extensiver Gröſsen“ angetroffen. Ein erheblicher Teil der im Bisherigen unter dem Namen des Erfahrungskreises II zu Gunsten der Merkelschen Ansicht in Anschlag gebrachten Thatsachen ist also dieser schon von vornherein unzugänglich. So restringiert sich auch das für die Merkelsche Auffassung günstige Erfahrungsgebiet auf einen Teil des an sich schon beschränkten Umkreises II; und daſs die Auffassung auch nur für dieses Teilgebiet richtig sei, wird

---

[1] Vergl. oben § 10.
[2] Vergl. oben § 21.
[3] Vergl. oben § 18 ff.

sofort durch den Umstand sehr zweifelhaft gemacht, dafs für charakteristisch damit völlig übereinstimmende Thatsachen (den Rest des Gebietes II), weil es sich da um unteilbare Gröfsen handelt, eine andere Erklärungsweise jedenfalls beigebracht werden mufs.

So wird es doch wohl mehr sein als Voreingenommenheit für die eigene Ansicht, wenn ich trotz der MERKELschen Versuche die Verschiedenheits- gegenüber der Differenzannahme im erheblichen Vorteile finde. Die Verschiedenheitsannahme hat die Theorie des Vergleichens, sie hat zugleich die Thatsachenkreise Ia und Ib uneingeschränkt und ohne Hülfshypothesen für sich und ist mit den Thatsachen II durch die Vermutung in Einklang zu bringen, dafs hier statt der Distanzen Strecken verglichen werden, bei denen an Stelle der einfachen Vergleichung die Teilvergleichung eintreten und dadurch der „Unterschied" im eigentlichen Wortsinne zu seinem Rechte gelangen kann. Vielleicht treffe ich, wie übrigens schon berührt,[1] doch auch wieder einigermafsen mit der Meinung MERKELS zusammen, der wiederholt[2] die Beurteilung „nach Unterschieden" und die Beurteilung „nach Verhältnissen" auseinanderhält.

§ 34. Die sogenannten Deutungen des WEBERschen Gesetzes.

Ich kann es mir hier nicht auch noch zur Aufgabe machen, die verschiedenen Auffassungen der im WEBERschen Gesetze gegebenen Thatsachen, die man unter den Schlagworten „physiologische, psychophysische und psychologische Deutung des WEBERschen Gesetzes" abzuhandeln sich gewöhnt hat, einer eindringenderen Erwägung ihrer Vorzüge und Mängel zu unterziehen. Dennoch hoffe ich, durch die vorstehenden Untersuchungen auch für diese „Deutungen" etwas gewonnen zu haben, etwas, dessen Wert um so höher anzuschlagen wäre, je weniger man vom Kampfe dieser Deutungen untereinander eine Schlichtung des Streites erhoffen mag:[3] ich meine die Erkenntnis, dafs das

[1] Vergl. oben S. 93 f. Anm. 2.

[2] So a. a. O. S. 150. 223. Vergl. auch Bd. VII. S. 560 ff. u. ö.

[3] Vergl. auch die neueste Diskussion dieser Deutungen durch W. DITTENBERGER a. a. O., *Arch. f. system. Philos.* Bd. II. S. 88 ff.

WEBERsche Gesetz auf besondere „Deutungen“ überhaupt nicht angewiesen ist.

Was die Thatsachen, die das WEBERsche Gesetz in sich faſst, besagen, ist einfach dies, daſs gleichen Reizverschiedenheiten gleiche Empfindungsverschiedenheiten, gröſseren Reizverschiedenheiten gröſsere, kleineren Reizverschiedenheiten kleinere Empfindungsverschiedenheiten zugehören. Das ist nichts weiter als der denkbar einfachste Sachverhalt,[1] der um so natürlicher erscheinen muſs, je enger man sich die Beziehung zwischen Reiz und Empfindung denken darf. Zu „deuten“ ist an diesem Sachverhalte nichts, vielmehr ist man auf das Deuten erst dort und in dem Maſse angewiesen, wo und in dem sich Abweichungen von dem WEBERschen Gesetze Anerkennung erzwingen. Erst bei den Abweichungen vom WEBERschen Gesetze heben also die Probleme eigentlich an, und es ist nicht zu besorgen, daſs sich die in dieser Richtung von der Forschung zu bewältigenden Schwierigkeiten als zu wenige oder zu geringfügige herausstellen sollten.

Dabei wird zugleich gerade die Einfachheit und Selbstverständlichkeit des das WEBERsche Gesetz charakterisierenden Gedankens den überzeugendsten Grund abgeben, an diesem Gesetze trotz der Menge der Ausnahmen als an der eigentlichen „Regel“ festzuhalten. Das WEBERsche Gesetz bedeutet die theoretische Norm, die ihre Geltung behält, wenn sich auch kein einziger Fall mit vollster Genauigkeit ihr fügen möchte.

Sollte es sich aber etwa aus äuſseren Gründen einmal doch als wünschenswert herausstellen, die hier vertretene Auffassung des WEBERschen Gesetzes als eine vierte „Deutung“ den drei herkömmlichen an die Seite zu setzen, so wüſste ich sie nur etwa als relations-theoretische Deutung zu bezeichnen. Unverhältnismäſsig anspruchsvoll wäre der Name freilich für die

---

[1] G. E. MÜLLER berichtet gelegentlich („*Zur Grundlegung*“ S. 393. Anm.) von „Laien, die vom WEBERschen Gesetz nicht das Mindeste wuſsten“, das Urteil, daſs „E. H. WEBER ja nur etwas Selbstverständliches, was sich jeder selbst sage, aussgesprochen habe“. Ähnliches bezeugt A. NITSCHE („Über Psychophysik etc.“ *Programm des k. k. Staatsgymnasiums in Innsbruck*. 1879. S. 12 f.), und mir selbst sind Äuſserungen im nämlichen Sinne begegnet. Mir scheint dergleichen in hohem Grade charakteristisch und beachtenswert; im Grunde haben unsere Untersuchungen nicht viel Anderes gelehrt, als daſs die betreffenden Laien eigentlich ganz recht haben.

Einfachheit der Sache; immerhin aber käme dabei das zunächst Charakteristische der hier durchgeführten Betrachtungsweise zur Geltung. Denn am Ende waren es doch die relationstheoretischen Untersuchungen in Bezug auf Verschiedenheit und Unterschied, die uns auf das Wesen der von WEBER beobachteten Gesetzmäſsigkeit geführt haben.

Das WEBERsche Gesetz ist darum bei weitem noch kein Relationsgesetz; es ist und bleibt ein Gesetz in betreff Reiz und Empfindung, wenn auch natürlich näher ein Gesetz in betreff der Relation zwischen Reiz und Empfindung. Um aber seinen Sinn zu erfassen, muſs man darüber im Klaren sein, wie sich relativer Unterschied und Verschiedenheit zu einander verhalten. Es war Sache relationstheoretischer Untersuchung, dieses Verhalten festzustellen, und insofern steht das Verständnis des WEBERschen Gesetzes auf relationstheoretischer Grundlage. Die Geltung des Gesetzes beruht nicht nur auf dem Zusammenhange zwischen Reiz und Empfindung, sondern zugleich, wenn auch in ganz anderem Sinne, auf dem Wesen der Verschiedenheit; und die praktische Bedeutsamkeit, namentlich die so oft hervorgehobene teleologische Seite des WEBERschen Gesetzes geht ohne Zweifel zunächst auf die Bedeutung zurück, die der Verschiedenheit zukommt. Will man darum in diesem Sinne von Relativität sprechen, will man insbesondere die Thatsache, daſs dem Verschiedenheitsmomente allenthalben eine ganz durchgreifende Wichtigkeit eigen ist, in einem „allgemeinen Relativitätsgesetze“ aussprechen, dann hat es in der That einen ganz guten Sinn, in Übereinstimmung mit der oben[1] besprochenen Begründung der Verhältnishypothese das WEBERsche Gesetz als speziellen Fall dieses „Relativitätsgesetzes“ zu betrachten.

Daſs schlieſslich, was hier vorübergehend die relations-theoretische Deutung genannt worden ist, der dritten unter den drei herkömmlichen „Deutungen“, der sogenannten psychologischen, am nächsten verwandt ist, versteht sich. Um Verschiedenheit zu konstatieren, muſs verglichen werden; Gesetze über Verschiedenheitsgröſsen sind unvermeidlich auch Gesetze über Vergleichungsergebnisse.[2] Wirklich wird die Theorie der

---

[1] Vergl. § 32.

[2] Selbst mit der Bezeichnung des WEBERschen Gesetzes als „Apperzeptionsgesetz“ könnte man sich sonach, den allerdings nötigen Kommentar vorausgesetzt, einverstanden erklären.

Vergleichung kaum aus einem Thatsachengebiete reichere Förderung schöpfen können als aus dem der Psychophysik: einseitig aber wäre es, zu vergessen, daſs das Vergleichen allein die Verschiedenheit und Gleichheit nicht ausmacht, und daſs dem Vergleichenden zumeist eben das die Hauptsache bleibt, was verglichen wird.

§ 35. Zusammenfassung.

Es wird sich empfehlen, die Hauptergebnisse der im Vorstehenden niedergelegten Untersuchungen zum Schlusse derselben unter Angabe der betreffenden Paragraphenzahlen noch einmal kurz zu formulieren.

I. 1. Für alle Gröſse ist wesentlich, gegen die Null zu limitieren. 2. Gröſsen sind entweder anschaulich oder unanschaulich. Sind letztere zahlenmäſsig ausdrückbar, wie dies z. B. bei den Gröſsen der Mechanik der Fall ist, so werden sie doch nicht etwa durch bloſse Zahlen oder Formeln erfaſst, sondern durch Vorstellungen von Gegenständen höherer Ordnung, die auf anschauliche Gröſsenvorstellungen aufgebaut sind. 3. Es ist der Gröſse nicht wesentlich, teilbar zu sein; es giebt auch unteilbare Gröſsen, wie z. B. die Distanzen im Gegensatze zu den ihnen zugeordneten Strecken beweisen.

II. 4. Vergleichen ist ein Thun, das auf das Fällen von evidenten Vergleichungsurteilen gerichtet ist. Alles ist vergleichbar; doch nennt man oft unvergleichbar, was beim Vergleichen zu keinem oder zu nicht ausreichend wichtigem Ergebnis führt. 5. Nur Vorgestelltes läſst sich unmittelbar vergleichen. Bestandstücke zweier Komplexionen werden um so leichter unmittelbar verglichen, je mehr die Komplexionen sonst übereinstimmen. 6. Festsetzungen darüber jedoch, was mit Gleichheit gemeint sei, sind weder möglich, noch erforderlich. 7. Speziell bei Gröſsenvergleichung erweist sich im Gröſser und Kleiner das Richtungsmoment charakteristisch; das Gerichtetsein gegen die Null ist vielleicht das Wesen des Gröſseseins. Was auf verschiedenen gegen Null gerichteten Linien liegt, läſst sich über gewisse Grenzen hinaus nicht (auf Gröſse) vergleichen. 8. Dies gilt im besonderen auch für das Vergleichen von Verschiedenheiten, bei denen qualitative Ungleichartigkeit (die „Lage“) das Vergleichungsergebnis in Frage stellen kann, aber nicht muſs.

Einfachheit der Sache; immerhin aber käme
Charakteristische der hier durchgeführten
zur Geltung. Denn am Ende waren es
theoretischen Untersuchungen in Bezug
und Unterschied, die uns auf das Wesen de
achteten Gesetzmäfsigkeit geführt haben.

Das WEBERsche Gesetz ist darum bei
Relationsgesetz; es ist und bleibt ein Ge
und Empfindung, wenn auch natürlich n
betreff der Relation zwischen Reiz und
aber seinen Sinn zu erfassen, mufs man d
sein, wie sich relativer Unterschied und V
einander verhalten. Es war Sache re
Untersuchung, dieses Verhalten festzustelle
steht das Verständnis des WEBERschen Geset
theoretischer Grundlage. Die Geltung des
nicht nur auf dem Zusammenhange zwische
pfindung, sondern zugleich, wenn auch in ga
auf dem Wesen der Verschiedenheit; und
deutsamkeit, namentlich die so oft hervorgeho
Seite des WEBERschen Gesetzes geht ohne
auf die Bedeutung zurück, die der Verschiedenh
man darum in diesem Sinne von Relativität
insbesondere die Thatsache, dafs dem Verschi
allenthalben eine ganz durchgreifende Wich
in einem „allgemeinen Relativitätsgesetze“ a
hat es in der That einen ganz guten Sinn, in
mit der oben[1] besprochenen Begründung der Ve
das WEBERsche Gesetz als speziellen Fall die
gesetzes“ zu betrachten.

Dafs schliefslich, was hier vorübergehend
retische Deutung genannt worden ist, der d
drei herkömmlichen „Deutungen“, der soge
logischen, am nächsten verwandt ist, versteht
schiedenheit zu konstatieren, mufs verglichen
über Verschiedenheitsgröfsen sind unvermeidli
über Vergleichungsergebnisse.[2] Wirklich wird

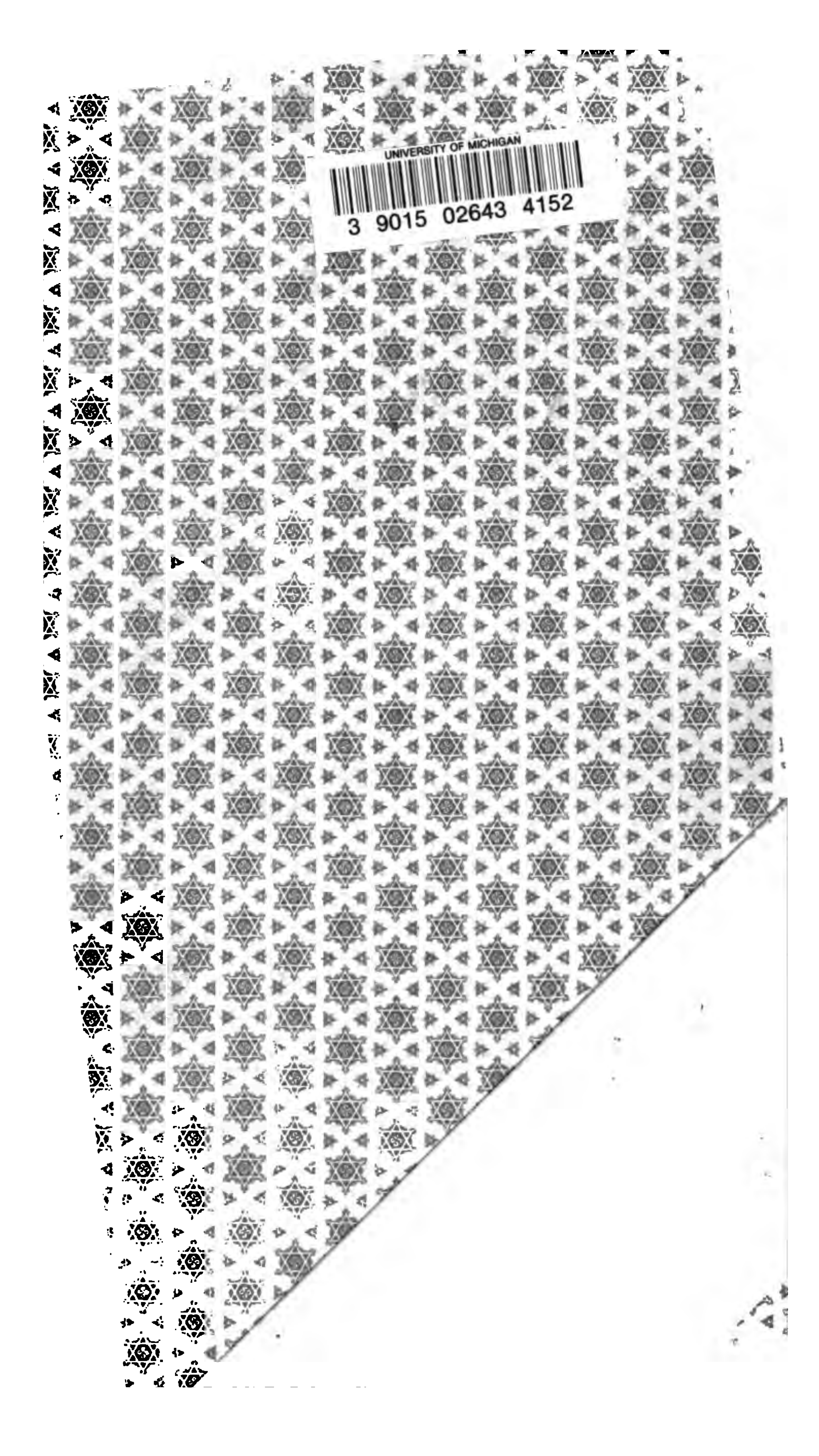
---

[1] Vergl. § 32.

[2] Selbst mit der Bezeichnung des WEBERschen Ge
zeptionsgesetz“ könnte man sich sonach, den allerdi
mentar vorausgesetzt, einverstanden erklären.

die im Abschnitt IV gesuchte Funktion gefunden, der gemäſs die Gröſse der Verschiedenheit durch die Gröſse des Verschiedenen bestimmt wird. 32. Streng genommen ist die sogenannte Verhältnishypothese nicht minder unhaltbar als die Unterschiedshypothese, und es ist wertlos, sich zu Gunsten der ersteren auf ein „allgemeines Relativitätsgesetz“ zu berufen; dennoch dürften Diejenigen, die für sie eintraten, mehr oder weniger deutlich das Richtige gesehen haben. 33. Daſs J. Merkel diese Hypothese auf Grund seiner Versuche vertreten kann, ohne Unterschied und Verschiedenheit auseinanderzuhalten, beweist nichts gegen diese Auseinanderhaltung, obwohl letztere für sich das Auftreten des arithmetischen Mittels bei Versuchen nach der Methode der mittleren Abstufungen noch nicht verstehen lehrt. Ein Überblick über die theoretische Situation zeigt, daſs die in den gegenwärtigen Untersuchungen durchgeführte Auffassung gleichwohl die bei weitem annehmbarere ist. 34. Sollte diese Auffassung dem sonstigen Herkommen gemäſs als „Deutung“ des Weberschen Gesetzes bezeichnet werden müssen, so hätte sie wohl auf den Namen einer „relationstheoretischen Deutung“ Anspruch; doch wünschte ich, ihr Wert möchte lieber darin zur Geltung kommen, daſs „Deutungen“ des Weberschen Gesetzes in Zukunft überhaupt entbehrlich würden.




UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 02643 4152

